This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

# TRAITÉ

DE

# GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DE LA JEUNESSE

ET DES PÈRES DE FAMILLE

QUI PRÉFÈRENT L'ÉTUDE DE L'ÉTENDUE DE LA LOUVRE ANCIENNE

PAR M. LAGRANGE.

A PARIS

CHEZ WERDET, LIBRAIRE,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 41.

TOME

IL PARIS XXX

2339

# TRAITÉ

DE

# GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE.

*Se trouve aussi*

Chez LECOINTE, QUAI DES AUGUSTINS ;
DELAUNAY, AU PALAIS-ROYAL ;
DAUBRÉE, GALERIE VIVIENNE.

PARIS. — IMPRIMERIE ET FONDERIE DE G. DOYEN
RUE SAINT-JACQUES, N. 38.

10574

# TRAITÉ
DE
# GÉOMÉTRIE
## ÉLÉMENTAIRE,

SUIVI D'UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES,

A L'USAGE DES JEUNES GENS
ET DES PÈRES DE FAMILLE
QUI S'OCCUPENT DE L'ÉDUCATION DE LEURS ENFANTS;

PAR M. F. LAGRANGE

A PARIS,
CHEZ WERDET, LIBRAIRIE,
RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, N. 21.

1830.

18

# TRAITÉ

DE

# GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

## INTRODUCTION.

1. La *géométrie* est une science qui a pour objet de mesurer des étendues et d'en évaluer les rapports.

L'étendue peut être considérée sous trois dimensions : la longueur, la largeur et la hauteur ou épaisseur.

Un *point géométrique* est une portion de l'étendue dont la longueur, la largeur et la hauteur sont excessivement petites, et presque égales à zéro. Dans le langage ordinaire, un point est une figure dont les dimensions sont petites, mais appréciables.

On appelle *ligne géométrique* une suite continue de points géométriques. La ligne n'a que de la longueur; elle n'a ni largeur ni hauteur : telle est la ligne AB (fig. 1re). Dans les arts les lignes

ont toujours une largeur, mais peu considérable.

La *ligne droite* est celle dont tous les points se dirigent vers un même point de l'espace; c'est celle qu'on parcourt en allant toujours dans la même direction. Cette ligne est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre.

On nomme *ligne courbe*, ou simplement *courbe*, toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites. Les points qui la composent changent à chaque instant de direction, et ne se dirigent plus vers un même point de l'espace : ainsi la ligne ABC (fig. 2) est une ligne courbe.

2. Une *surface* a deux des dimensions de l'étendue, de la longueur et de la largeur, mais elle n'a pas d'épaisseur. Ainsi l'enveloppe extérieure ou intérieure d'un corps est une surface.

Le *plan* est une surface dans laquelle prenant à volonté deux points quelconques, et joignant ces deux points par une droite, cette droite doit être entièrement dans la surface. La surface des eaux tranquilles, celle d'une feuille de papier, sont des plans; celle d'une table bien dressée est encore un plan, et, si on applique sur cette table une règle exactement droite, cette règle dans toute son étendue touchera la table, dès que ses deux extrémités ou deux quelconques de ses points seront en contact avec cette table.

3. Dans une *surface courbe*, toutes les directions ou quelques-unes d'entre elles changent à chaque point. Si on applique une règle droite sur une pareille surface, la règle ne la touche qu'en un seul point, ou bien ne la touche en plusieurs que dans certaines directions. Telle est la surface

extérieure d'une boule et celle d'un tuyau droit quelconque.

*Un solide*, ou *corps*, est ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue, la longueur, la largeur et la hauteur. On connaît des solides terminés par des surfaces planes, et d'autres par des surfaces courbes Une pierre de taille, une pyramide, donnent une idée des premières, et une sphère ou des boules, des secondes.

4. On peut concevoir autrement les lignes, les plans et les surfaces. On suppose dans la ligne droite qu'elle est engendrée par un point qui, partant de A (fig. 1re), chemine vers B toujours dans la même direction, et en laissant derrière lui la trace de son passage; dans la ligne courbe, que le point, en partant de A (fig. 2), change à chaque instant de direction, et passe successivement par les points B et C. De même on peut supposer qu'une ligne droite s'avance d'une manière régulière, en s'appuyant par ses deux extrémités sur deux autres lignes droites, ce qui donne naissance au plan; ou qu'une ligne droite ou courbe chemine, en s'appuyant par ses deux bouts, sur deux lignes courbes semblables ou différentes; ou d'un côté sur une ligne droite, et de l'autre sur une courbe, ce qui engendre toutes les surfaces courbes. La ligne qui laisserait pour trace de son passage ces différentes surfaces courbes est appelée *génératrice*.

Plusieurs espèces de solides peuvent être engendrées par un plan qui s'avance en ligne droite ou courbe, ou par un plan qui tourne autour d'un point quelconque comme centre. Le plan

qui tourne ou qui s'avance est appelé *plan générateur*.

Quand deux figures posées l'une sur l'autre s'ajustent, se confondent dans toutes leurs parties, elles ont même forme et même grandeur, et l'on dit qu'elles sont parfaitement *égales*.

La géométrie s'occupe d'abord des lignes, puis des surfaces, et enfin des solides.

### DES ANGLES ET DES PERPENDICULAIRES.

5. Deux lignes droites suffisamment prolongées, qui se dirigent vers des points différents de l'espace, se rencontrent, mais en un seul point qu'on nomme leur point d'*intersection*. Les lignes BD et CE (fig. 5) sont dans ce cas, et ont en A leur point d'intersection. Réciproquement, deux lignes qui se coupent en un point A se dirigent vers des points différents de l'espace.

6. Entre deux points donnés A et B (fig. 1re) on peut toujours faire passer une ligne droite AB; mais on n'en peut faire passer qu'une seule, parce que, si, en partant de A, un seul point de cette ligne se dirigeait vers un autre point de l'espace que le point B, la ligne A B ne serait plus droite [1].

Au contraire, on peut tirer une infinité de lignes courbes entre des points donnés, parce qu'elles peuvent s'écarter de toutes les manières possibles dans leur direction dans l'espace.

7. L'écartement de deux lignes qui se coupent, ou la différence de la direction que prennent les deux lignes droites BD, CE, se nomme

*angle* ou *angle-plan*. Le point A d'intersection s'appelle le *sommet* de l'angle, et les lignes AB, AC, en sont les *côtés*. On désigne ordinairement un angle, en géométrie, par la lettre A du sommet placée entre les deux lettres B et C des côtés. Ainsi l'angle en A sera désigné par les trois lettres ABC.

8. Un angle peut être plus ou moins considérable, selon les points de l'espace vers lesquels se dirigent les lignes qui forment les côtés. L'angle BAD (fig. 4) est plus grand que l'angle BAC, et BAE est plus grand encore que BAD.

9. On peut comparer les angles entre eux, car si on suppose que les trois angles BAC, CAD, DAE, sont égaux, il est évident que l'un d'eux sera le tiers de l'angle total BAE, que l'angle BAC sera la moitié de l'angle BAD; enfin que l'angle BAD sera les deux tiers de l'angle BAE; en un mot, on peut comparer ces angles dans tous leurs rapports de grandeur ou d'écartement.

10. On appelle *perpendiculaire* une ligne qui coupe une autre ligne sans pencher plus d'un côté que d'un autre. La ligne droite AB (fig. 5) est une perpendiculaire sur la ligne droite CD, parce qu'elle s'élève sans s'incliner de l'un ni de l'autre côté. L'*angle droit* est celui formé par une perpendiculaire abaissée sur une autre ligne droite : ainsi les angles ABD, ABC sont droits, parce que AB est perpendiculaire sur CD.

11. *D'un point* B (fig. 7) *on ne peut mener qu'une perpendiculaire* BA *sur une ligne droite donnée* DAC. Supposons en effet que du point B on puisse mener deux perpendiculaires BA, BD,

sur la même ligne droite DAC : je prolonge BA de manière que AE égale AB; puis je mène la ligne droite DE; ensuite je replie toute la partie DAE sur DAB, en la faisant tourner sur DA; AE se pose sur AB, et le point E sur le point B : donc DE se pose aussi sur DB, et l'on pourrait mener deux lignes droites BAE et BDE entre deux points B et E, ce qui est absurde [6].

12. Une perpendiculaire AB (fig. 5) sur une ligne droite CD forme toujours deux angles droits ABD, ABC. Comme elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre [10] ces deux angles doivent être égaux entre eux.

13. *Tous les angles droits sont égaux entre eux;* car si on suppose qu'on ait une autre ligne HI (fig. 6) perpendiculaire sur une droite FG, et que dans les figures 5 et 6 on prenne quatre distances égales BD, BC, IF et IG; puis qu'on pose la figure 6 sur la figure 5, en faisant coïncider le point F avec le point B, il est évident que les points I et G tomberont sur les points C et D, car, sans cela, on pourrait mener deux droites entre les points B et C, ce qui est impossible [6]. Maintenant je dis que la ligne HI couvrira exactement la perpendiculaire AB; car, si on admet qu'elle prenne une autre direction BE, il est évident que les angles ABD, ABC, étant égaux entre eux, les nouveaux angles EBD, EBC ne peuvent plus être égaux [12], puisque le premier est plus petit que l'angle ABD de tout l'angle ABE, et que le second surpasse l'angle droit ABC de ce même angle ABE. Or, comme nous avons vu que deux angles formés par deux droites perpendiculaires

l'une à l'autre étaient toujours égaux, il s'ensuit que la ligne HI ne peut prendre d'autre direction que celle de la ligne BA, et par conséquent que tous les angles droits sont égaux entre eux.

14. Un angle *aigu* est celui qui est plus petit que l'angle droit : tel est EBD (fig. 5). L'angle *obtus*, au contraire, est plus grand que l'angle droit : ainsi EBC est un angle obtus. La ligne EB qui n'est perpendiculaire ni à AB ni à CD se nomme une *oblique*.

15. L'angle droit, étant de grandeur constante, sert d'unité de mesure pour les autres angles : ainsi l'angle droit étant représenté par 1, la fraction $^1/_4$ représentera un angle aigu compris quatre fois dans l'angle droit, et la fraction $^3/_2$ un angle obtus moitié en sus plus grand que l'angle droit.

16. On nomme *adjacents* deux angles formés par une ligne droite qui en coupe une autre. Les angles droits ABC, ABD (fig. 8) sont adjacents ; il en est de même des deux angles inégaux EBC, EBD.

17. *La somme de deux angles adjacents est toujours égale à deux angles droits* ; ce qui est évident, puisque, si l'angle aigu EBD est plus petit que l'angle droit ABC de tout l'angle ABE, d'un autre côté l'angle obtus EBC est plus grand que l'angle droit de tout ce même angle ABC : donc en ajoutant ensemble ces angles EBD, EBC, on doit les trouver égaux à deux angles droits.

On conclut encore de ce principe que des lignes obliques FB, EB, en quelque nombre qu'elles soient, qui viennent se couper en un même point d'une droite, forment des angles CBF, FBE, EBD, dont

la somme est toujours égale à deux angles droits.

18. *Les angles opposés au sommet* sont ceux qui, comme CAD, BAE (fig. 9), sont formés par une ligne droite qui en coupe une autre sous une inclinaison quelconque. Les angles obtus BAC, DAE sont également opposés au sommet. Une ligne qui en coupe une autre forme donc quatre angles opposés deux à deux au sommet.

19. *Quatre angles opposés deux à deux au sommet sont égaux à quatre angles droits;* ce qui est évident quand l'une des lignes est perpendiculaire sur l'autre ligne; mais nous avons démontré (17) que la somme des deux angles adjacents BAC, CAD était toujours égale à deux angles droits; d'un autre côté, il doit en être de même des deux autres angles adjacents BAE, DAE : donc ces quatre angles opposés deux à deux au sommet sont égaux à quatre angles droits.

20. Les angles adjacents BAC, BAE doivent aussi égaler deux angles droits; mais si d'un côté en ajoutant à l'angle BAC l'angle CAD, nous avons eu une somme égale à deux angles droits, et qu'en ajoutant au même angle BAC l'angle BAE opposé au sommet à CAD, nous avons encore deux angles droits, il est rigoureusement nécessaire que les angles BAE, CAD, qui produisent une même somme quand on leur ajoute un même angle BAC, soient égaux entre eux. Et, comme le même raisonnement pourrait s'appliquer aux angles opposés au sommet BAC, DAE, on en conclut que tous *les angles opposés au sommet sont toujours égaux.*

21. Quand une ligne en coupe une autre sous

une inclinaison quelconque, et sans lui être perpendiculaire, des quatre angles opposés deux à deux au sommet, et formés par l'intersection de ces lignes, deux des angles opposés CAD, BAE, sont aigus, et les deux autres BAC, DAE nécessairement obtus. Donc, si l'un des quatre angles était droit, les trois autres le seraient aussi, et les lignes qui se couperaient seraient perpendiculaires l'une à l'autre [11].

### DES LIGNES PARALLÈLES.

22. On appelle *lignes parallèles*, ou simplement *parallèles*, des lignes droites situées dans un même plan, et qui ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge. Une ligne droite qui coupe des parallèles sous un angle quelconque a été nommée *sécante*.

Il suit de la définition des parallèles, 1° que deux lignes parallèles à une troisième sont parallèles entre elles; 2° qu'une ligne qui est parallèle à une autre ligne est encore parallèle à toutes celles qui le sont à la seconde.

23. *Une ligne perpendiculaire à une autre ligne l'est également à la parallèle de celle-ci.* En effet, puisque FG (fig. 10) est perpendiculaire sur BC, les angles FAC, FAB sont droits; mais il doit en être de même des angles FHE, FHD, puisque, si ces angles n'étaient pas droits, la ligne DE irait à une distance quelconque couper la ligne BC, ce qui est contraire à la définition des parallèles [22]: donc FG, perpendiculaire sur BC, l'est également à sa parallèle DE.

24. Prenons sur les lignes parallèles AB, CD (fig. 11) trois points A, E, B, puis C, F, D, à égale distance; puis menons entre ces parallèles les trois perpendiculaires AC, EF, BD. Maintenant si nous faisons tourner la partie BEFD autour de EF, de manière que le pli se trouve dans cette ligne EF, et que nous l'appliquions sur la partie AEFC; je dis que les lignes EB, FD, comme parties d'une ligne droite, couvriront exactement les lignes AE et CF, et que les points B et D tomberont sur les points A et C. La ligne BD coïncidera donc avec la ligne AC, et sera de même longueur qu'elle; et, comme il suit de là que toutes les perpendiculaires entre parallèles sont égales, on en conclut que *deux parallèles sont dans toute leur étendue également distantes.*

25. Pour tracer une parallèle CD (fig. 12) à une ligne droite donnée AB, il suffit de mener à celle-ci une perpendiculaire AC, puis d'élever CD perpendiculaire à AC; alors CD est parallèle à la ligne donnée. En effet, si les deux lignes AB et CD n'étaient pas parallèles, elles se rencontreraient en un point [22], et de ce point on pourrait abaisser deux perpendiculaires sur une droite AC; chose impossible [11].

26. *La sécante coupe sous un même angle toutes les lignes parallèles;* car si l'on prend sur la ligne CD (fig. 15) des distances CH, HD, égales aux distances AG, GB de la ligne AB, et qu'on fasse couler la ligne CD sur la sécante et bien parallèlement à AB, les points C, H, D viendront tomber sur les points A, G, B, et les angles GHD, GHC, formés par CD et par la sécante, seront absolu-

ment égaux aux angles EGB, EGA formés par la même sécante et par la ligne AB. Donc, etc.

Les angles AGH, GHC sont appelés *intérieurs d'un même côté*. Les angles BGH, GHD portent le même nom. Les angles AGH, GHD et les angles BGH, GHC s'appellent *alternes-internes*. Les angles EGB, GHD s'appellent *internes-externes*. Enfin, les angles EGB, CHF prennent le nom d'*alternes-externes*. Il est donc démontré,

1° Que les angles intérieurs d'un même côté pris ensemble valent deux angles droits;

2° Que les angles alternes-internes sont égaux;

3° Que les angles internes-externes sont égaux;

4° Que les angles alternes-externes sont égaux; Ou que les quatre angles AGE, BGH, CHG, DHF sont égaux entre eux; que de même les quatre angles BGE, AGH, DHG, CHF sont aussi égaux, et que l'un quelconque des premiers, ajouté à l'un quelconque des seconds, forme toujours deux angles droits.

Cette similitude et cette valeur des angles formés par une sécante qui coupe deux parallèles est de rigueur, et, si elle n'avait pas lieu, les lignes se rencontreraient à une distance plus ou moins éloignée, et ne seraient plus parallèles [22].

27. *Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une autre ligne*, parce que, si par le point H (fig. 14) on pouvait mener une autre parallèle IK à la ligne AB, les angles KHG, IHG ne seraient plus égaux aux angles EGB, AGE, et par conséquent la ligne IK rencontrerait quelque part la ligne AB, et ne lui serait plus parallèle.

## DES TRIANGLES ET DES OBLIQUES.

28. Un *triangle* est une figure plane formée par trois droites qui se coupent réciproquement deux à deux, mais non dans un même point. Les lignes AB, AC, BC (fig. 15), comprises entre les points d'intersection de ces droites, se nomment les *côtés* du triangle. Outre les trois côtés, on distingue encore dans un triangle les trois angles ACB, ABC, BAC, opposés à ces trois côtés.

On nomme triangle *équilatéral* celui dont les trois côtés sont égaux (fig. 15, A); *isocèle*, celui qui n'a que deux côtés égaux (B); *scalène* un triangle dont les trois côtés sont inégaux (C).

Un triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit (D). Le côté opposé à l'angle droit se nomme *hypothénuse*.

La *hauteur* d'un triangle est la perpendiculaire AD (fig. 16) abaissée du sommet A d'un des angles sur un des côtés BC, prolongé s'il le faut, qui prend alors le nom de *base*.

29. On peut toujours construire un triangle égal à un triangle donné, en formant ce nouveau triangle avec des côtés et des angles égaux à ceux du premier, et en superposant les triangles pour vérifier cette égalité; dans le cas où les deux figures ne coïncideraient pas dans toutes leurs parties, l'un des triangles n'aurait pas été construit régulièrement, et ils ne seraient pas égaux.

Pour conclure qu'un triangle est égal à un autre triangle, il n'est pas nécessaire de savoir

que les trois angles et les trois côtés sont égaux dans ces deux triangles; il suffit pour leur égalité qu'ils aient *un angle égal compris entre deux côtés égaux*. En effet, si on posait le triangle DEF (fig. 17) sur le triangle ABC, l'angle F étant supposé égal à l'angle C, le côté FD prendrait la direction CA, et le côté FE la direction CB. Mais nous avons supposé que FD = CA, et que FE = CB; donc le point D tombera sur le point A, et le point E sur le point B; le troisième côté DE couvrira exactement le côté AB [6], et les deux triangles, coïncidant dans toutes leurs parties, seront par conséquent égaux.

30. Deux triangles sont encore égaux quand ils ont *deux angles et le côté compris entre ces deux angles égaux*. Car si les angles D et F du triangle DEF sont égaux aux angles en A et en C du triangle ABC, en posant le côté DF sur son égal AC, les côtés EF et DE, par suite de l'égalité des angles, prendront la direction BC et AB; mais le point E, comme faisant partie de la ligne EF, a dû tomber en quelque point de la ligne BC; de même, comme appartenant encore à la ligne DE, lorsqu'on a superposé celle-ci sur AB, il a dû tomber en quelque point de AB; or, comme il se trouve à la fois sur BC et sur AB, il doit nécessairement tomber à leur intersection en B. Les deux triangles ABC, DEF coïncident donc dans toute leur étendue, et sont par conséquent égaux.

On peut donc construire un triangle quand on connaît 1° la longueur des trois côtés; 2° deux côtés et l'angle compris entre eux; 3° un côté et

les deux angles qui ont leurs sommets aux extrémités de ce côté.

31. Un triangle qui a ses trois angles égaux à ceux d'une autre triangle peut très-bien ne pas lui être égal. En effet, si dans le triangle ABC (fig. 18) nous menons à une distance quelconque dans son intérieur une ligne DE, parallèle à BC, le triangle ADE aura un angle A commun avec le triangle ABC ; l'angle ADE sera égal à l'angle ABC comme internes-externes [26]. Il en est de même des angles AED et ACB : le triangle ADE a donc ses trois angles égaux à ceux du triangle ABC, et il est aisé de voir que ces triangles ont cependant des dimensions fort inégales.

32. Si les angles en B et en C du triangle ABC (fig. 19) étaient égaux entre eux, ainsi qu'aux deux angles en E et en F du triangle DEF, et que le côté EF fût égal à BC, il s'ensuivrait que, si on voulait vérifier l'égalité de ces deux triangles, on pourrait appliquer le dernier de deux manières sur le premier; d'abord en portant le côté DF sur le côté AC, ou bien le côté DE sur ce même côté AC en renversant le triangle. Mais, dans ces deux cas, le point D tomberait sur le point A [30]; les côtés AB, AC du triangle ABC seraient donc non-seulement égaux entre eux, mais il le seraient encore aux côtés DE et DF du triangle DEF : les triangles seraient par conséquent isocèles, et on en concluerait que dans les *triangles les angles opposés aux côtés égaux sont égaux*, et que les *côtés opposés aux angles égaux sont également égaux ;* enfin qu'un triangle qui a deux angles égaux est isocèle,

et équilatéral quand ses trois angles sont égaux.

33. Si dans un triangle quelconque ABC (figure 20), où le côté AC est le plus grand côté, je prends sur ce côté une distance AD = AB, et que je trace la ligne BD, le triangle isocèle ABD aura, par conséquent deux angles égaux ABD et ADB, opposés à ses côtés égaux [32.] Maintenant si je menais CE parallèle à la ligne BD, les angles ADB, DCE seraient égaux [26], et il est aisé de voir que l'angle DCE surpasse l'angle DCB de tout BCE. L'angle DCB est donc plus petit que ADB ou que son égal ABD; d'un aure côté ABD lui-même est plus petit que ABC de tout l'angle DBC; et on pourrait démontrer de même que l'angle en A est plus petit que ABC, et par conséquent que ce dernier angle est le plus grand du triangle, et comme il est opposé au grand côté AC, on en concluera que *dans tout triangle le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

34. Réciproquement *au plus grand côté d'un triangle est toujours opposé le plus grand angle;* car supposons ABC le plus grand angle; d'après ce qui vient d'être démontré [32], si AC = AB il faut nécessairement que l'angle ABC = l'angle ACB. Si on avait AC < AB, on aurait encore ABC < ACB. Le côté AC suit donc toutes les phases de grandeur de l'angle ABC, et, comme nous avons supposé que cet angle était le plus grand, AC qui lui est opposé est donc aussi le plus grand côté.

35. *Dans tout triangle la somme de deux côtés quelconques est plus grande que le troisième côté.* Si dans le triangle ABC (fig. 21) on prolonge le côté AB d'une longueur BD, égale à BC, le triangle

isocèle BCD aura ses deux angles BDC, BCD égaux [32]; mais l'angle ACD est plus grand que l'angle BCD ou que son égal en D de tout l'angle ACB; par conséquent le côté AD du triangle ACD, opposé au plus grand angle, sera plus grand que le côté AC opposé à l'angle D [34]; mais AD représente la somme des côtés AB et BC du triangle ABC, puisque BD = BC; donc la somme de ces deux côtés est plus grande que le côté AC, ou AB + BC > AC.

On conclut encore de cette démonstration que *dans tout triangle un côté est plus grand que la différence des deux autres*, ou que AB > AC — BC ou BC > AC — AB.

36. *Les trois angles d'un triangle sont toujours égaux à deux angles droits.* Soit le triangle ABC (fig. 22); je prolonge en G et en H les côtés AC et BC du triangle, et par le point C je mène DF parallèle à AB. Il est clair maintenant que BH pouvant être considéré comme une sécante qui coupe les parallèles AB et DF, l'angle DCH sera égal à l'angle ABC [26]; de même, si AG est considéré comme une sécante, les angles ACD, BAC seront égaux comme alternes-internes. Les trois angles ACB, ACD, DCH, formés autour du point C, seront donc égaux aux trois angles ACB, BAC, ABC du triangle ABC; mais nous avons vu que la somme des angles formés autour d'un point C par des obliques sur une droite était toujours égale à deux angles droits [17]. Donc les trois angles d'un triangle sont toujours égaux à deux angles droits, ou ABC + ACB + BAC = 2 angles droits.

Il est évident que l'angle ACH, qu'on appelle an-

gle *extérieur* au triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs ABC et BAC, puisque en ajoutant à cet angle ou à cette somme le même angle ACB on a toujours un produit égal à deux angles droits.

37. Si on suppose que sur la ligne BE (fig. 23) on élève la perpendiculaire AD, et que du point A on mène les obliques AC, AB, il est évident que l'oblique AC, opposée dans le triangle ACD au plus grand angle, puisque ADC est un angle droit, est plus longue que la perpendiculaire AD [33]. Maintenant si du point C nous menons à AC une perpendiculaire CF, qui coupera AB en F, nous formerons un nouveau triangle rectangle ACF, où le côté AF, opposé à l'angle droit ACF, sera plus grand que AC. A plus forte raison AB sera-t-il à son tour plus long que AC et que AD : donc la *perpendiculaire est la plus courte des lignes qu'on puisse abaisser d'un point donné sur une autre ligne*, et par suite, *de deux obliques menées d'un même côté, ou d'un côté différent de la perpendiculaire, la plus longue est celle qui s'éloigne davantage de cette ligne ;* $AD < AC < AB$ ; $AC < AB$.

38. *Deux obliques sont égales quand elles sont situées à égale distance de chaque côté de la perpendiculaire.* Les deux obliques AB, AC (fig. 24), forment deux triangles qui ont un angle égal, ou $ADB = ADC$ compris entre côtés égaux ; c'est-à-dire le côté AD commun et $BD = DC$, par hypothèse [29] ; ces deux triangles sont donc égaux, et par conséquent $AB = AC$.

Réciproquement, *deux obliques égales sont également éloignées de la perpendiculaire;* car si le triangle ADC, en le faisant tourner autour de AD,

est appliqué sur le triangle ABD, AC étant égal à AB par hypothèse, il faudra que le point C tombe sur le point B; le triangle ABC étant isocèle, l'angle ACD coincidera exactement avec l'angle ABD, et par suite DC se confondra avec BD : donc DC=BD, ou les deux obliques sont à des distances égales de la perpendiculaire.

Puisque ABC est isocèle, et que BD=DC, il s'ensuit que *la perpendiculaire divise en deux parties égales l'angle au sommet et la base d'un triangle isocèle, et que deux triangles rectangles, qui ont un côté* AD *de l'angle droit égal et des hypothénuses* AB, AC *égales, sont égaux.*

### DES QUADRILATÈRES ET DES POLYGONES.

39. Un *quadrilatère* est une figure formée par quatre droites AB, AC, BD, CD (fig. 25). Le quadrilatère a quatre côtés, quatre angles et quatre sommets. Les lignes AD, BC, qui joignent les sommets opposés, se nomment *diagonales*.

Parmi les quadrilatères on nomme *quarré* (figure 26, A) celui qui a ses quatre côtés égaux et ses quatre angles droits; ses deux diagonales sont égales entre elles, et se coupent à angle droit en un point également éloigné des quatre sommets.

Le *rectangle* (*id.* B) a ses quatre angles égaux et droits, mais les côtés opposés seulement sont égaux; ses deux diagonales sont égales et se coupent en un point également éloigné des quatre sommets, mais non plus à angle droit.

Le *parallélogramme* ou *rhombe* (fig. 27, C) a les côtés opposés parallèles; ses angles ne sont

pas droits, et ceux opposés seulement sont égaux, les diagonales sont inégales. Si les quatre côtés sont égaux, on l'appelle *losange* (*id.* D).

Enfin le *trapèze* (*id.* E) a seulement deux côtés parallèles; les quatre côtés et les quatre angles sont inégaux, et les diagonales de différentes longueurs.

40. *La somme des quatre angles d'un quadrilatère quelconque est toujours égale à quatre angles droits.* En effet une diagonale divise un quadrilatère quelconque en deux triangles qui ont six angles dont la somme est toujours égale à quatre angles droits [36], et il est évident que ces six angles sont égaux aux quatre angles du quadrilatère.

Il suit de là 1° qu'un quadrilatère ne peut avoir ses quatre angles tous aigus ou tous obtus; 2° qu'un quadrilatère dont la somme de deux angles est égale à deux angles droits a aussi la somme des deux autres angles égale à deux angles droits.

41. On nomme *polygones* des figures formées par un nombre quelconque de lignes droites qui se coupent réciproquement deux à deux. Un triangle, un quadrilatère sont des polygones; mais on applique plus particulièrement ce nom aux figures qui ont plus de quatre côtés.

On distingue plusieurs espèces de polygones : 1° les *polygones réguliers* ou *équiangles*, qui ont tous leurs côtés égaux et leurs angles égaux (fig. 28, A); 2° les *polygones irréguliers* (*id.* B) dont les côtés et les angles sont inégaux. On appelle *convexes* ceux qui, comme A, n'ont pas d'angles rentrants.

Généralement on désigne un polygone par le

nombre de ses côtés : ainsi on dit un polygone de 20 ou 50 côtés ; mais plusieurs polygones ont reçu des noms grecs désignant le nombre de leurs angles et de leurs côtés. Ainsi le

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pentagone a | 5 côtés. | Décagone a | 10 côtés. |
| Hexagone | 6 côtés. | Endécagone | 11 côtés. |
| Heptagone | 7 côtés. | Dodécagone | 12 côtés. |
| Octogone | 8 côtés. | Pentedécagone | 15 côtés. |
| Ennéagone | 9 côtés. | etc., etc. | |

On nomme *diagonales* d'un polygone des droites AC, AD, etc. (fig. 29), qui du sommet d'un angle quelconque A vont aux sommets C, D, etc. des angles non contigus à l'angle A.

42. *Tout polygone peut être divisé en un nombre de triangles égal au nombre de ses côtés, moins deux.* En effet dans l'octogone (fig. 29) le nombre des côtés est de 8 ; celui des triangles qu'on peut y former par des diagonales partant d'un même angle A est de 6, ou 8—2. On vérifierait de même que dans le décagone on peut tracer huit triangles, ou 10—2, et dans le décagone dix triangles, ou 12—2.

43. Puisqu'un polygone peut être divisé en un nombre de triangles égal au nombre de ses côtés moins deux, il est évident que la somme de tous les angles de ces triangles sera égale à celle de tous les angles du polygone. Or les angles de tous ces triangles sont égaux à autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles : donc *la somme de tous les angles d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Puisqu'on peut connaître la somme de tous les angles du polygone, en divisant cette somme par le nombre des angles, on aura la valeur d'un de ces angles : ainsi dans l'octogone (fig. 29) la somme de tous les angles = deux angles droits $\times$ (8 — 2) ou douze angles droits : divisant ce nombre 12 par 8, nombre des angles, on a pour quotient un angle droit et demi qui est la valeur d'un des angles de l'octogone.

44. Si on prolonge dans le même sens chacun des côtés d'un polygone, tel que DCI (fig. 29), la somme de tous les angles extérieurs, tels que BCI, joints aux angles intérieurs, est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés dans le polygone. En effet chaque côté prolongé DI du polygone peut être considéré comme une ligne droite sur laquelle tombe une oblique BC ; et nous savons que ces lignes forment toujours à leur rencontre deux angles inégaux entre eux, mais dont la somme égale deux angles droits [17] ; et comme ce raisonnement s'applique à tous les côtés, il est clair que *la somme totale des angles intérieurs et extérieurs doit être égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés dans le polygone.*

Si de la somme totale des angles extérieurs et intérieurs, ou de deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtés dans le polygone, on retranche la somme des angles intérieurs, ou autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux, on aura toujours pour reste deux fois deux angles droits, ou quatre angles droits pour la somme des angles extérieurs : donc *dans tout polygone la somme des*

*angles extérieurs est toujours égale à quatre angles droits.* Ainsi, dans l'octogone, 8 × 2 angles droits ou 16 = la somme des angles intérieurs et extérieurs [44]; retranchons-en (8 — 2), ou 6 × 2 angles droits, ou 12 angles droits, somme des angles intérieurs [43], il restera 4 angles droits pour la somme des angles extérieurs.

### DE LA CIRCONFÉRENCE.

45. On nomme *cercle* une surface plane, courbe et fermée ABED (fig. 30), dont le bord, appel *circonférence*, a tous ses points également éloigné d'un point intérieur C, appelé *centre*. Dans le discours on se sert souvent du mot cercle pour circonférence.

Le *diamètre* est la droite BCD qui va d'un point à l'autre de la circonférence, en passant par le centre. Toutes les lignes droites menées du centre à la circonférence, tels que CA, CB, CF, sont nommées *rayons :* le rayon est donc la moitié du diamètre.

Tous les points de la circonférence devant être à égale distance du centre, les rayons qui partent de ce centre pour se rendre à cette circonférence doivent avoir même longueur; donc *tous les rayons d'un même cercle sont égaux entre eux.* Les diamètres qui ne sont que des rayons directement opposés des deux côtés du centre sont aussi par conséquent égaux entre eux.

46. *Chaque diamètre* BD *divise le cercle en deux parties égales.* Pour s'en assurer, il n'y a qu'à plier la portion BED sur la portion BAD, en faisant tourner BED autour du diamètre BD

comme charnière. Si quelque point du contour BED tombait en dedans ou en dehors du contour BAD, ils seraient plus près ou plus loin du centre; ce qui est impossible [45] : donc le contour BED s'applique partout sur BAD, et les deux portions du cercle, séparées par le diamètre BD, sont égales entre elles.

Une ligne droite ne peut couper la circonférence en plus de deux points ; car, s'il se trouvait sur une circonférence trois points en ligne droite, il s'ensuivrait que du centre on pourrait abaisser trois obliques égales entre elles et au rayon sur cette ligne, ce qui est impossible [37, 38].

47. On appelle *corde* toute ligne droite BA terminée de part et d'autre à la circonférence, et *arc* de cercle toute portion BFA de la circonférence. Quand une corde et un arc se terminent aux mêmes points A et B de leur circonférence, on dit que la corde BA sous-tend l'arc BFA. La *flèche* est la partie GF du rayon comprise entre cette corde et l'arc.

Un *segment* est la portion BFAG du cercle comprise entre l'arc et la corde, et le *secteur* la portion BFAC comprise entre l'arc et deux rayons quelconques.

La *tangente* DH est une droite extérieure au cercle, perpendiculaire à l'extrémité du rayon, et qui ne touche la circonférence que dans un seul point D, qu'on nomme *point de contact*. La *sécante* est une droite qui coupe le cercle, et se prolonge de part et d'autre au-delà de la circonférence.

48. Une corde ne peut jamais être plus grande

qu'un diamètre; car la corde BA, dans le triangle ABC, ne peut jamais être égale aux deux côtés AC et BC [35] ou à deux fois le rayon. Or le diamètre passe par le centre, et est le double du rayon ; il est donc nécessairement la plus grande des cordes qu'on puisse mener dans une circonférence.

49. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, des cordes égales sous-tendent des arcs égaux.* Ce qui est évident, puisque, si on posait une de ces cordes sur l'autre, les points extrêmes de l'une tomberaient sur les points A et B de l'autre, par suite de leur égalité, et les deux arcs coïncideraient dans leur étendue [46]. Réciproquement, *des arcs égaux sont toujours sous-tendus par des cordes égales dans un même cercle ou des cercles égaux.*

50. *Le rayon perpendiculaire à une corde divise l'arc et la corde en deux parties égales.* En effet, menons les rayons CA, CB (fig. 31), qui sont alors deux obliques égales relativement à la perpendiculaire [38], nous aurons alors un triangle isocèle ABC partagé en deux triangles rectangles qui ont un angle égal et deux côtés égaux, et qui sont par conséquent égaux : donc AO = OB. Les cordes AD, DB sont aussi des obliques égales, et si on replie CODB sur CODA, le point B tombera sur le point A, et l'arc DB sur l'arc DA, puisque aucun point du premier arc ne pourrait tomber en dedans ou en dehors du second sans être plus près ou plus loin du centre G [45] : donc les deux arcs DB, DA sont égaux.

51. On déduit de cette démonstration que

1° *une ligne droite qui coupe la corde ou l'arc en deux, et qui leur est perpendiculaire, passera nécessairement par le centre*, puisque, pour être perpendiculaire, il faut qu'elle soit dans tous les points de son étendue également éloignée des deux extrémités A et B [58], et que le centre C du cercle est un point qui jouit de cette propriété, relativement aux extrémités A et B de l'arc ou de la corde; 2° *une ligne qui passe par le centre, et qui coupe l'arc ou la corde en deux, sera perpendiculaire à la corde*, parce qu'elle a tous ses points également éloignés des deux extrémités A et B de l'arc et de la corde.

52. *Par trois points donnés, non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence.* En effet, soient A, D, B (fig. 32) les trois points donnés; je joins ces points par les lignes droites AD, BD. Je suppose maintenant que AD est la corde d'un cercle, et sur le milieu de cette ligne j'élève une perpendiculaire FC, et comme une perpendiculaire sur le milieu de la corde passe par le centre [51], le cercle qui passerait par les points A et D aura son centre en quelque point de la ligne FC. En appliquant le même raisonnement à DB, le centre du cercle qui passera par les points D et B devra se trouver en quelque point de la ligne CH, perpendiculaire à la corde BD. Or, ce centre C, devant se trouver en même temps sur CF et sur CH, sera nécessairement placé à leur intersection.

Le point C sera donc le centre du cercle qui passera par les points A, D, B; ce qui est évident, puisque si l'on mène les lignes CA, CD, CB, on

aura d'abord deux obliques CA, CD qui seront égales, puisqu'elles sont également éloignées de la perpendiculaire [38], qu'on a pris AF = FD, et qu'on a élevé la perpendiculaire sur le milieu de la corde : même raisonnement pour les deux obliques CD, CB, relativement à la corde DB. Donc ces trois obliques sont égales, et sont les rayons d'une circonférence qui a son centre en C et qui passe par les points A, D, B.

53. Quand les cordes AB, DE, FG (fig. 35) d'un cercle sont parallèles, les arcs AD et BE, DF et EG, etc., qu'elles comprennent, sont égaux. Pour le démontrer, menons du centre C le rayon CLMNP perpendiculaire à toutes les cordes, il coupera chacune d'elles en deux parties égales [50], et de plus, en comparant la longueur des arcs qui correspondent à ces cordes, on doit avoir arc PA = arc PB, arc PD = arc PE, arc PF = arc PG, ce qui exige qu'on ait arc AD = arc BE, arc DF = arc EG. Donc *des parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.*

54. Deux cercles de rayons égaux sont évidemment égaux.

Quand deux circonférences se coupent en deux points C et D (fig. 34), la ligne AB qui joint les centres de ces cercles est perpendiculaire à la ligne CD, qui joint les points de contact; car CD est une corde commune aux deux circonférences, et, si sur le milieu de cette corde on élève une perpendiculaire, elle doit passer par les deux centres A et B [51]. Or, par deux points donnés on ne peut mener qu'une seule ligne droite [6], et il est évident que le centre A est également éloigné des ex-

trémités C et D de cette corde; qu'il en est de même du centre B, et que, par conséquent, AB est perpendiculaire à CD.

Puisque la ligne des centres AB doit être perpendiculaire à la corde qui joint les points de contact C et D, les deux circonférences ne peuvent se toucher en trois points; car, en joignant deux à deux ces trois points, on formerait avec trois cordes un triangle aux côtés duquel il faudrait que la ligne des centres AB fût en même temps perpendiculaire; ce qui est impossible.

55. *Dans deux circonférences qui se touchent extérieurement la distance des centres est égale à la somme des rayons.* Ce qui est manifeste, puisque les rayons se terminent à la circonférence. Les deux circonférences n'ont qu'un point de commun; car, si elles en avaient deux, on pourrait de ce second point conduire des droites aux deux centres, et ces droites formeraient, avec la ligne des centres, un triangle où cette ligne, somme des rayons, serait égale à la somme des deux autres côtés; ce qui a été démontré impossible [35] (fig. 35, A et B).

*Si la distance des centres est égale à la différence des rayons, les deux circonférences se touchent intérieurement* (fig. 35, A et D).

*Si la distance des centres est plus courte que la somme des rayons, les deux cercles se couperont.* En effet, dans le triangle ACB (fig. 34) le côté AB est plus court que la somme AC + CB des deux rayons.

*Si la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, les deux circonférences sont*

*hors l'une de l'autre; et, si cette distance est plus petite que la différence des rayons, une des circonférences est entourée par l'autre.*

56. Lorsque dans un cercle (fig. 36) on trace un diamètre AE, et que, perpendiculairement à ce diamètre on mène un autre diamètre BD, on divise la circonférence en quatre parties égales [46]; mais les deux diamètres, en se coupant au point C, forment ainsi quatre angles dont chacun est égal à un angle droit [12]. Donc *un angle droit intercepte entre ses côtés le quart de la circonférence* décrite, avec un rayon quelconque du sommet comme centre.

*Deux angles au centre égaux* ACB, ACD (figure 37) *interceptent sur la circonférence des arcs égaux*. En effet, joignons les extrémités des côtés par les cordes BA et AD, nous aurons deux triangles où, par hypothèse, les angles au sommet C sont égaux; où, de plus, le côté AC est commun, et où BC = CD comme rayons; ces triangles sont par conséquent égaux [29]. Les cordes AB, AD sont donc égales; et par suite les arcs AB, AD, interceptés par les angles ACB, ACD, sont égaux. Réciproquement, *les arcs égaux répondent à des angles au centre égaux.*

57. Si les angles au centre étaient inégaux, au plus grand angle serait opposé le plus grand côté [33] ou la plus grande corde. Ainsi *un plus grand ou un plus petit angle au centre intercepte entre ses côtés un plus grand ou un plus petit arc de la circonférence;* ou enfin l'arc ou la corde suivent tous les changements de grandeur de l'angle au centre, et réciproquement.

## DE LA MESURE DES ANGLES.

58. Nous avons dit [15] que l'angle droit, étant de grandeur constante, était propre à servir d'unité de mesure pour les autres angles ; mais on a jugé plus commode de prendre l'arc AB (fig. 36) ou le quart de la circonférence [56], intercepté entre les côtés de l'angle droit, pour commune mesure de tous les angles.

Pour parvenir à ce but, le cercle a d'abord été divisé en quatre parties égales, lesquelles donnent par conséquent quatre quarts de circonférence qui servent de mesure aux quatre angles droits qui embrassent tout l'espace autour du centre C.

Ensuite on a divisé chaque quart en 90 parties égales, qu'on a nommées degrés : ainsi la circonférence du cercle contient quatre fois 90 ou 360 degrés, la demi-circonférence deux fois 90 ou 180, le tiers de la circonférence 120, le cinquième 72, le sixième 60, le huitième 45, le dixième 36, etc.

Pour pouvoir mesurer encore des angles plus petits qu'un degré, on divise le degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes*, et chaque minute en 60 autres parties égales appelées *secondes*.

Afin d'indiquer d'une manière abrégée les degrés, minutes et secondes, on se sert de ces signes, °, ′, ″ : ainsi 24° 42′ 28″ signifie 24 degrés 42 minutes 28 secondes.

59. On appelle *angle inscrit* celui qui, comme BAD (fig. 38), a son sommet sur la circonférence.

une perpendiculaire qui divisera la corde AB et son arc en deux parties égales BE, AE [54]. Par le point de division E on mènera les cordes BE, AE, et on aura inscrit au cercle un octogone ou un polygone d'un nombre de côtés doubles. On aurait pu diviser l'arc AB ou un nombre quelconque de parties, et opérer de même. On peut de même partager les arcs AE, BE par la moitié, ou en prendre le tiers ou le quart, qui serviront à tracer les cordes de polygones dont le nombre des côtés sera de plus en plus grand, et où les côtés seront de plus en plus petits. Donc, *un cercle étant donné, on peut y inscrire un polygone d'autant de côtés* qu'on voudra.

61 *bis*. Par trois points qui ne sont pas en ligne droite on peut toujours faire passer une circonférence [52]. Si les trois points sont les trois sommets d'un polygone régulier, la circonférence passera encore par tous les autres sommets du polygone : donc *on peut toujours tracer un cercle dans lequel soit inscrit un polygone donné, quelque soit le nombre de ses côtés.*

Si on partage par la moitié les quatre côtés d'un quarré, il est évident que ces quatre points seront à une distance égale du point où les deux diagonales du quarré se coupent [59] : par conséquent, si de ce point comme centre, et avec un rayon égal à la moitié d'un des côtés du quarré, on trace une circonférence, elle touchera chacun des quatre côtés du quarré en un seul point qui sera le milieu de ces côtés. On dit alors que le quarré est *circonscrit* au cercle. Si, comme précédemment, on partage les côtés du quarré et les

arcs qui leur correspondent en parties de plus en plus petites, on formera une suite de polygones réguliers circonscrits : donc *on peut, un cercle étant donné, y circonscrire un polygone d'autant de côtés qu'on voudra*; et réciproquement, *un polygone d'un nombre quelconque de côtés étant donné, on peut toujours y inscrire un cercle.*

### DES PROPORTIONS.

62. On peut faire sur les lignes géométriques les mêmes opérations que l'arithmétique indique pour les nombres. Ainsi on peut ajouter une ligne droite à la suite d'une autre ligne, et de même retrancher d'une ligne quelconque la longueur d'une autre ligne. On peut supposer qu'on prenne pour unité de mesure le mètre; alors multiplier une ligne par une autre ligne, c'est prendre le produit du nombre de mètres qui représentent la longueur de ces lignes; et diviser une ligne par une autre, c'est diviser le nombre de mètres qui représentent la première par le nombre de mètres qui représentent la seconde. Ainsi, quand je prends la mesure d'une longueur avec un mètre, je la divise en autant de parties égales entre elles, et toutes égales au mètre.

On verra plus loin que le produit d'une ligne multipliée par une autre ligne représente toujours la surface d'un parallélogramme qui aurait pour longueur de ses côtés adjacents la longueur de ces deux lignes; et qu'en divisant une ligne par une autre on peut supposer que le dividende représente lui-même l'aire d'un parallélogramme

dont le diviseur est un côté, et dont le quotient qu'on cherche doit être le côté adjacent.

La géométrie possède aussi sa règle de trois; car, si l'on connaît trois lignes A, B, C, il est facile d'en trouver une quatrième D, telle qu'on ait $A : B :: C : D$ qui forme ainsi une proportion. Il serait facile de vérifier cette proportion d'après le principe d'arithmétique qui enseigne que le produit des extrêmes égale le produit des moyens, ou que $A \times D = B \times C$.

65. Si vous divisez l'extrême A par le moyen B et D par C, vous aurez ce qu'on appelle deux rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ qui, pour que la proportion soit régulière, doivent être encore égaux, c'est-à-dire $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$. Si au contraire c'est un moyen B ou C que vous divisez par une extrême A ou D, vous aurez deux nouveaux rapports $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{D}$, qu'on nomme rapports inverses, et qui doivent être également égaux; ainsi $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$; ou $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ sont des rapports qui forment ce qu'on nomme une *égalité*.

*On peut multiplier chacun des rapports d'une proportion par une même quantité, sans qu'ils cessent d'être égaux.* Ainsi multiplions $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ par D, il viendra $\frac{A \times D}{B} = \frac{D \times C}{D}$; effaçons dans le

second rapport D, qui se détruit puisqu'il divise et multiplie en même temps la ligne D; il restera $\frac{A \times D}{B} = C$; c'est-à-dire qu'*un moyen égale le produit des extrêmes divisé par l'autre moyen.* Multipliant de même l'égalité $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ par C il restera $\frac{B \times C}{A} = D$; ce qui veut dire qu'*un extrême égale le produit des moyens divisé par l'autre extrême.*

Quand les deux moyens sont égaux entre eux, la longueur ou le nombre qui les représente est ce qu'on appelle *une moyenne proportionnelle* entre les extrêmes: ainsi, dans A : B :: B : C, B est une moyenne proportionnelle aux lignes A et C.

64. Deux figures sont *égales,* quand, étant appliquées l'une sur l'autre, elles coïncident dans tous leurs points. On les appelle *équivalentes*, quand leurs surfaces [2] sont égales; les figures équivalentes peuvent être très-dissemblables: par exemple, un cercle peut être équivalent à un quarré, à un triangle, etc. On dit que deux figures sont *semblables*, quand elles ont la même forme apparente, quoique l'une soit plus grande ou plus petite que l'autre, ou, plus exactement, lorsqu'elles ont les angles égaux chacun à chacun, et les côtés *homologues* proportionnels. Par côtés homologues on entend ceux qui ont la même position dans les deux figures, ou qui sont adjacents à des angles égaux. Les angles peuvent aussi être homologues.

L'*aire* d'une surface est le nombre d'unités superficielles que cette surface contient. L'*unité* de

mesure superficielle est un quarré qui a pour côté l'unité de longueur, soit un pouce, un pied ou un mètre. Ainsi, quand on dit qu'une surface a 100 mètres quarrés, on entend qu'elle peut être divisée en 100 quarrés ayant chacun un mètre de côté.

Les côtés adjacents d'un parallélogramme rectangle s'appellent l'un la *base*, et l'autre la *hauteur* du rectangle. Il est évident que deux rectangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont égaux.

### DE LA MESURE DES SURFACES.

65. *L'aire d'un rectangle est égal à sa base multipliée par sa hauteur.* En effet, si dans le rectangle ABCD (fig. 43) la base BC peut être divisée en 6 parties égales au mètre, et que par chaque point de division on élève des perpendiculaires *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, parallèles aux côtés AB et DC, on l'aura divisé en 6 rectangles égaux. Si de même la hauteur AB était exactement divisée en trois hauteurs de 1 mètre, et que par les points de division on menât des parallèles à la base BC, on formerait ainsi 18 quarrés ayant chacun 1 mètre en tout sens. Mais 6, nombre de mètres de la base BC, multiplié par 3, nombre de mètres de la hauteur AB, donne pour produit 18; donc BC $\times$ AB mesure l'aire du rectangle ABCD.

L'aire du quarré, par suite de cette règle, doit être égale à son côté multiplié par lui-même. Ce produit, qu'on appelle *quarré* en arithmétique, se marque par un petit 2, qu'on pose à droite et

en haut du nombre qu'on suppose multiplié par lui-même; aussi $20^2$ signifie 20 élevé au quarré ou multiplié par lui-même. De même, en géométrie, $AB^2$ veut dire que la ligne AB est mulipliée par elle-même, ou représente le quarré construit sur la ligne AB comme un des côtés.

Voici la suite des quarrés des 10 premiers chiffres de notre numération :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffres | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| Quarrés | 1. | 4. | 9. | 16. | 25. | 36. | 49. | 64. | 81. | 100. |

66. Si le rectangle ne se fût étendu que jusqu'en *gh*, ou n'eût eu que quatre mètres de base, la surface eût été égale à $4 \times 3$ ou douze mètres quarrés. Or, en comparant la surface 12 mètres de ce dernier rectangle à celle du premier qui a 18 mètres, on voit que 12 n'est que les $^2/_3$ de 18; or B*h* ou 4 n'est également que les $^2/_3$ de BC ou 6 : donc *les aires de deux rectangles qui ont même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

Le même raisonnement s'appliquerait à la hauteur BA, si elle changeait, et on en conclurait facilement que *les aires de deux rectangles de même base sont entre elles comme leurs hauteurs.*

Enfin, si les deux rectangles n'avaient ni même base ni même hauteur, il suffirait pour les comparer, quand on connaîtrait le nombre d'unités superficielles contenues dans chacun d'eux, de prendre le rapport des deux nombres qui exprimeraient ces surfaces. Or ces surfaces sont le produit de la base par la hauteur : donc *les aires de deux rectangles sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

67. On peut prendre pour base un quelconque des côtés opposés du parallélogramme [39] ABCD (fig. 44). La hauteur est la perpendiculaire AE ou AF comprise entre deux côtés parallèles. Le parallélogramme a donc deux hauteurs.

*Le parallélogramme est équivalent au rectangle de même base et de même hauteur.* En effet, si nous prolongeons la base BC en G, et que du point D nous abaissions la perpendiculaire DG, nous formerons un triangle DCG égal au triangle ABE, puisque DC est égal et parallèle à AB, et qu'il en est de même des perpendiculaires DG et AE [29]. Si du rectangle ABCD nous retranchons le triangle ABE, pour le placer en DCG, nous aurons formé un rectangle AEGD ; ces deux figures sont donc équivalentes : par conséquent *l'aire du parallélogramme est égale à sa base multipliée par sa hauteur.*

On en conclut aisément que 1° *les aires de deux parallélogrammes sont entre elles comme les produits des bases par les hauteurs ;* 2° *deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme les hauteurs, et de même hauteur sont entre eux comme les bases ;* 3° *deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.*

68. Un triangle ABC (fig. 45) peut être considéré comme la moitié d'un parallélogramme ayant même base BC, et même hauteur AE [28, 64] : donc *l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur* [67] ou *au produit de la base par la moitié de la hauteur*, ou *au produit de la hauteur par la moitié de la base.* Par suite, *deux triangles de même hauteur sont entre*

*eux comme leurs bases*, et *deux triangles de mêmes bases sont entre eux comme leurs hauteurs*; et *tous les triangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont équivalents.*

69. *La surface du trapèze égale la demi-somme de ses deux bases mulipliée par sa hauteur.* Le trapèze ABCD (fig. 46), dont la hauteur est CF, est divisé par la diagonale AC en deux triangles ABC, ACD, ayant même hauteur CF, et qui ont pour mesure, le premier $\frac{1}{2}$ AB $\times$ CF; le deuxième $\frac{1}{2}$ DC $\times$ CF. La somme de ces deux produits donne $\frac{1}{2}$ (AB + DC) $\times$ CF pour la mesure de la surface du trapèze.

Sur le milieu des deux côtés non parallèles DA, CB du trapèze ABCD menons la ligne EG parallèle aux deux bases AB et DC, puis par le point G conduisons HI perpendiculaire à ces bases, et prolongeons DC jusqu'en I. Les deux triangles BGH, CGI ont leurs angles au sommet en G égaux, le côté BG égal au côté GC, l'angle en C égal à l'angle en B comme alternes-internes [26], ces deux triangles sont donc égaux [58], et le côté CI est égal au côté BH. Faisons de même au point E deux autres triangles au moyen d'une autre perpendiculaire LK aux bases. En appliquant à ces deux triangles les mêmes raisonnements, on sera conduit à la même conclusion, c'est-à-dire à AL = KD. Maintenant AB = AL + LH + BH, et DC = KI — KD — CI; mais KI et LH sont égales à EG comme comprises entre les parallèles KL, HI; de plus KD = AL, et CI = BH : on aura donc, pour les valeurs de AB et DC, AB = AL + EG + BH et DC = EG — AL — BH;

ajoutant ces deux lignes, on trouvera $AB + DC = 2EG$, ou $EG = \frac{AB + DC}{2}$, ce qui signifie que *la ligne menée parallèlement aux bases, et par le milieu des côtés non parallèles d'un trapèze, est moyenne arithmétique entre ces bases.*

Il suit de là que la surface du trapèze a pour mesure $CF \times EG$ ou sa hauteur multipliée par la ligne parallèle aux bases qui coupe en deux parties égales les côtés non parallèles.

70. Un polygone ABCDEFGH (fig. 47) peut être décomposé en autant de triangles égaux, ayant leur sommet en O au centre du polygone, qu'il y a de côtés ; or chacun de ces triangles a pour mesure sa base AB ou BC ou CD, multipliée par la moitié de la hauteur commune OI [68] : donc *la surface du polygone régulier est égale à son contour multiplié par la moitié de la distance de son centre au milieu d'un de ses côtés,* ou *à la moitié de son contour par la distance du centre au milieu d'un de ses côtés.*

71. Un cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'un très-grand nombre de côtés, ou dont les côtés sont si petits que leur changement de direction est à peine appréciable : on peut donc appliquer à la mesure de sa surface la même règle qui sert à mesurer celle du polygone, en observant toutefois que les distances du centre au milieu des côtés du polygone, à mesure que ces côtés diminuent de grandeur et se confondent avec la circonférence, deviennent égales au rayon. Ainsi *la surface du cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié de son rayon,* ou *à*

*sa demi-circonférence multipliée par son rayon.*

*Un secteur* [47], par conséquent, *aura pour mesure l'arc qu'il comprend entre ses côtés, multiplié par la moitié du rayon*; et, si de la surface de ce secteur AFBC (fig. 50) on retranche la surface du triangle ABC, on aura celle du segment BFAG.

### DES LIGNES PROPORTIONNELLES ET DES FIGURES SEMBLABLES.

72. *Dans un triangle une ligne menée parallèlement à la base divise les côtés en parties proportionnelles.* Menons dans le triangle ABC (fig. 48) la ligne DE parallèlement à la base, et joignons BE et CD. Les triangles BDE, DEC, qui ont même base DE, ont aussi même hauteur, puisque les sommets B et C sont situés sur une parallèle à la base; ils sont donc équivalents [64, 68]. Les triangles ADE, BDE, dont le sommet commun est en E, ont même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases AD, BD; donc on a triang. ADE : triang. BDE :: AD : BD. Les triangles ADE, CDE, par un raisonnement semblable, donnent cette autre proportion, triang. ADE : triang. CDE :: AE : CE. Mais le triangle CDE est équivalent au triangle BDE, et, si on substitue celui-ci dans le deuxième proportion, ses deux premiers termes seront les mêmes que ceux de la première; donc les deux autres termes de la première doivent former une proportion avec les deux derniers de la seconde, c'est-à-dire qu'on doit avoir AD : BD :: AE : EC.

Il résulte encore de cette proportion, en ajou-

tant au premier extrême la ligne DB, et au premier moyen la ligne EC proportionnelle à DB, qu'on aura

$$AD + DB : DB :: AE + EC : EC;$$

$$\text{Mais } AD + DB = AB;\ AE + EC = AC:$$

$$\text{Donc } AB : BD :: AC : EC;$$

$$\text{Et de même } AB : AD :: AC : AE.$$

73. Supposons que DE partage l'angle ADC en deux parties égales, et qu'on ait fait BD = DC, alors, dans la proportion AD : BD :: AE : EC, on peut substituer DC à DB, et elle devient AD : DC :: AE : EC; ce qui signifie que *la ligne qui divise en deux parties égales l'angle d'un triangle partage la base en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.*

74. Si entre deux lignes droites AD, EH (fig. 49) on mène une suite de parallèles AE, BF, CG, etc.; puis qu'on prolonge ces lignes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en O, on pourra dans le triangle OBF [72], établir cette proportion, OB : AB :: OF : EF. De même, dans le triangle OCG, on aura OB : BC :: OF : FG; donc, à cause du rapport commun OB, OF, ces deux proportions donnent AB : EF :: BC : FG. On démontrerait de même que BC : FG :: CD : GH, et ainsi de suite; donc, *si entre deux droites formant un angle quelconque on mène des parallèles en tel nombre qu'on voudra, ces parallèles couperont les deux droites en parties proportionnelles.*

75. *Deux triangles* ABC, DEF (fig. 50), *qui ont leurs côtés homologues parallèles, sont semblables, et ces côtés sont proportionnels.* Pour le démontrer, supposons qu'on place la base DE du

triangle DFE à la suite de celle du triangle ABC; les côtés seront alors parallèles. Prolongeons ensuite FE jusqu'à ce qu'il rencontre en O le côté BA prolongé, dans le triangle OBE où AC est parallèle à la base OE, on aura cette proportion, BA : AO :: BC : DE; de même DF, étant parallèle à BO, on aura BC : DE :: FO : FE; mais AO = DF et FO = AC; donc AB : DF :: BC : DE :: AC : FE.

Les deux triangles ABC, OBE ayant leurs côtés homologues parallèles, ces côtés doivent aussi être proportionnels, et on doit avoir BO : BA :: OE : AC; donc *deux droites formant un angle quelconque* B, *et qui coupent des parallèles* AC, OE, *interceptent sur ces parallèles des parties proportionnelles entre elles, et à la distance des points d'intersection au sommet de l'angle* B. Il en serait de même s'il avait trois parallèles ou trois secantes.

76. Faisons tourner le triangle DEF d'un quart de circonférence, de manière qu'il prenne la position CEF (fig. 51); il est évident que, dans ce cas, ses trois côtés, au lieu d'être parallèles, deviendront perpendiculaires à leurs homologues dans le triangle ABC; et, comme ce changement de position n'a pas changé les rapports de ces lignes entre elles, on en conclut que *deux triangles qui ont leurs côtés homologues perpendiculaires sont semblables, et que ces côtés sont proportionnels.*

77. Dans les triangles ABC, DEF (fig. 50) où les côtés sont parallèles, les angles correspondants sont nécessairement égaux. En effet l'angle A = l'angle O, comme formé par une sécante coupant deux parallèles [26]: par le même motif l'angle O = l'angle F; donc l'angle A = l'angle F. Le

rence; du sommet du triangle abaissons la perpendiculaire CD sur le diamètre :

1° Les triangles ABC, ADC sont semblables. En effet, ces triangles ont l'angle A commun, les angles en D et en C droits, et l'angle ABC = l'angle ACD, puisque, en ajoutant à chacun de ces angles le même angle A, ils formeront une somme égale à un angle droit; ces triangles qui ont leurs trois angles égaux sont donc semblables [77]; leurs côtés homologues doivent être proportionnels, et on doit avoir AB : AC :: AC : AD, ce qui signifie que *dans un triangle rectangle* ABC, *le petit côté à gauche* AC *est moyenne proportionnelle* [63] *entre l'hypothénuse* AB *et la portion* AD *de cette hypothénuse à gauche de la perpendiculaire* CD, ce qu'on exprime ainsi : $AC^2 = AB \times AD$.

2° On prouverait de même que les triangles ABC et BCD sont semblables, et que leurs côtés homologues donnent cette proportion AB : BC :: BC : BD, ou *le petit côté de droite* BC *est moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse* AB *et la portion* BD *de cette hypothénuse à droite de la perpendiculaire* CD; ou $BC^2 = AB \times BD$.

3° Les triangles ACD, BCD qui sont rectangles en D, et où l'angle B = l'angle ACD, et l'angle A = l'angle BCD, sont encore semblables; et, en comparant les côtés homologues, on obtient AD : DC :: DC : BD, ou *la perpendiculaire* CD *est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AD *et* BD *de l'hypothénuse* AB; ou $DC^2 = AD \times BD$.

81. *Le quarré fait sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.* Soit le triangle ABC

(fig. 54) rectangle en C; je forme sur ses trois côtés les quarrés G, E, F, et du sommet de l'angle droit C j'abaisse la perpendiculaire CD. Nous venons de voir que cette construction donnait lieu aux deux égalités suivantes [80, 1°, 2°] : $AC^2 = AB \times AD$, et $BC^2 = AB \times BD$; ajoutant membre à membre ces deux égalités, nous aurons $AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD)$; mais $AD + BD = AB$, et l'égalité devient $AC^2 + BC^2 = AB^2$; ou, en d'autres termes, le quarré construit sur le côté AC, plus celui construit sur BC, égalent le quarré construit sur l'hypothénuse AB.

Cette proposition peut encore être prouvée mécaniquement; on le voit à l'inspection des figures 54 *bis* et *ter*, où l'on a partagé les petits quarrés en parties qui correspondent exactement avec celles du grand quarré. Les parties qui portent des numéros dans les petits quarrés correspondent aux parties qui portent le même numéro dans le grand; et, si on découpait les petits quarrés dans les lignes indiquées, ces parties couvriraient exactement le grand carré.

### DES FIGURES SEMBLABLES.

82. Désignons par surface ABCD (fig. 55) la surface du parallélogramme rectangle ABCD, et par surf. *abcd* celle du parallélogramme *abcd* qui lui est semblable. Puisque ces polygones à quatre côtés sont semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels [78]. Or la surface de ces parallélogrammes est égale à leur hauteur multipliée par leur base [65], et ces surfaces étant

proportionnelles, on aura surf. ABCD : surf. *abcd* :: AB $\times$ BD : *ab* $\times$ *bd* ; mais les bases et les hauteurs étant proportionnelles, il en résulte que AB : *ab* :: BD : *bd*. Substituant donc dans la proportion les bases BD, *bd* aux hauteurs AB, *ab*, on aura, surf. ABCD : surf. *abcd* :: $BD^2$ : $bd^2$, qui signifie que *dans deux rectangles semblables les surfaces sont comme les quarrés des côtés homologues.*

83. Le parallélogramme eût pu ne pas être rectangle, que le même raisonnement lui eût encore été applicable. Ainsi la démonstration embrasse un parallélogramme quelconque; et, comme un triangle a pour surface la moitié du parallélogramme de même base et de même hauteur [68], il s'ensuit que *dans deux triangles semblables les surfaces sont comme les quarrés des côtés homologues.*

Les figures semblables peuvent être décomposées en un certain nombre de triangles semblables [78], qui sont entre eux comme les quarrés des côtés correspondants : donc *les surfaces de toutes les figures semblables, terminées par des lignes droites* (triangles, quadrilatères, polygones), *sont entre elles comme les quarrés construits sur leurs côtés homologues.*

Les *cercles* étant des figures semblables, il est aisé de démontrer [71, 79] *que leurs surfaces sont proportionnelles aux quarrés construits sur leurs rayons, ou sur leurs diamètres comme côtés.*

Par la même raison, *les surfaces des secteurs seront, dans deux cercles, proportionnelles aux quarrés des rayons de ces cercles.*

DE LA DIVISION DU CERCLE, DE LA MESURE DES ANGLES, ET DU RAPPORT DU DIAMÈTRE A LA CIRCONFÉRENCE.

84. Si dans un triangle rectangle inscrit dans un cercle (fig. 42) on mène le rayon CA, qui partagera la base en deux parties égales, on aura deux autres triangles rectangles et isocèles [38]. Le quarré, construit sur la base AB d'un de ces triangles, sera égal aux quarrés construits sur les deux autres côtés AC et BC [81]; c'est-à-dire qu'on aura $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Maintenant les deux côtés AC et BC étant égaux comme rayons, si nous les supposons égaux à l'unité, l'égalité précédente donnera $AB^2 = 1 + 1$, ou $AB = \sqrt{2}$, parce que le quarré de l'unité elle-même est l'unité. On voit donc que si on voulait avoir la valeur de AB, il faudrait extraire la racine quarrée du nombre 2 : cette racine est approximativement de 1,4142, sans qu'on puisse lui trouver une valeur finie, quelque loin qu'on pousse la fraction décimale qui l'accompagne. Or, comme AB est le côté d'un quarré inscrit dans le cercle BADO, dont le rayon est AC ou BC [61], il s'ensuit que le *côté du quarré inscrit dans un cercle ne peut avoir de mesure commune, ou de plus grand commun diviseur, avec le rayon de ce cercle, ou que ces deux lignes sont incommensurables.*

85. Menons un rayon perpendiculaire sur le milieu du côté du quarré AB; il coupera la circonférence en E; et, joignant E avec les points A

et B, nous formerons un octogone ou un polygone d'un nombre de côtés double du quarré [61]. Puisqu'on a partagé l'angle droit C en deux parties égales, [58, 50], et que d'ailleurs l'angle B, à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc AD, quart de la circonférence [59], les triangles BFC, AFC sont isocèles, et dans le triangle rectangle AFC, ou $AC^2 = AF^2 + FC^2$, on a, à cause de $AF = FC$, $AC^2 = 2AF^2$ (1). De même, dans le triangle rectangle AEF, on a $AE^2 = EF^2 + AF^2$ (2); mais $EF = EC - FC$, et $FC = AF$ : substituant dans l'égalité (2) ces valeurs de AF, EF, FC, il viendra $AE^2 = 2AC^2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ ou $AE = AC\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, quantité encore incommensurable; donc dans l'octogone le côté AE est incommensurable avec le rayon du cercle circonscrit.

Même démonstration pourrait avoir lieu pour les polygones d'un plus grand nombre de côtés : pour le polygone de 16 côtés, par exemple, on obtiendrait $AG = AC\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, où la quantité incommensurable, qui est sous le signe radical, fait voir suffisamment qu'il ne peut y avoir de mesure commune entre le côté AG du polygone de 16 côtés et le rayon AC. Ce qu'on démontre ici, pour le côté d'un polygone, aurait également lieu pour les autres côtés d'un même polygone, et pour la somme de tous les côtés de ce polygone; et, comme la circonférence n'est qu'un polygone d'un nombre infini de côtés [71, 79], on en conclut aisément que *le rapport de la cir-*

*conférence au rayon ou au diamètre est incommensurable.*

86. En continuant ainsi à chercher le côté d'un polygone inscrit de 32, 64, 128 côtés, on parviendrait enfin à obtenir un polygone dont le côté serait si petit, et qui aurait un si grand nombre de côtés, qu'il différerait alors très-peu de la circonférence. Et, en multipliant la longueur du côté qu'on obtiendrait ainsi, au moyen d'une égalité de la forme de celle ci-dessus, par le nombre des côtés du polygone, on aurait ainsi un rapport fort approché de la circonférence au rayon, ou au diamètre.

Mais, pour approcher encore davantage de la valeur de ce rapport, on suppose un second polygone circonscrit à la circonférence; et, en le divisant de même en un nombre considérable de côtés, il tend de plus en plus à se confondre avec la circonférence. On pousse ainsi la division des deux polygones, jusqu'à ce que les nombres qui expriment leurs contours en multiples du diamètre soient les mêmes dans les 5, 10, 15 ou 20 premières décimales; alors on prend ce nombre à 5, 10, 15 ou 20 décimales, pour le rapport du diamètre à la circonférence, car le cercle doit toujours être compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit; et, si ceux-ci ne diffèrent point entre eux jusqu'à un certain ordre de décimales, le cercle n'en différera pas non plus jusqu'au même ordre.

87. Ces opérations ont été faites par cette méthode et par d'autres procédés approximatifs, plus expéditifs; et on a trouvé que le rapport de la

circonférence au diamètre était égal à 3,1415926, quand on supposait que le diamètre était égal à l'unité, ou, en d'autres termes, que le diamètre, porté sur la circonférence, y serait contenu 3 fois, plus un million quatre cent quinze mille neuf cent vingt-six dix millionième de fois, à peu près.

Archimède, célèbre géomètre sicilien, qui vivait trois siècles avant Jésus-Christ, a trouvé, en inscrivant un polygone de 96 côtés, que ce rapport était à peu près $3\frac{10}{71}$ ou $3\frac{1}{7}$; mais cette valeur est trop faible, et on doit préférer pour la pratique celle donnée par Métius, géomètre hollandais, qui a trouvé pour ce rapport $\frac{355}{113}$, qui est fort exact, et très-facile à retenir puisqu'il se compose de la série des nombres impairs 1, 3, 5, qui se répètent deux fois, en allant de gauche à droite, et en commençant par le dénominateur.

Divers géomètres ont poussé plus loin la partie décimale de ce rapport. Ludolph Van-Keulen a été jusqu'à la 35e; Lagny jusqu'à la 128e, et Véga a poussé l'approximation jusqu'à la 140e décimale.

88. Désignons, pour abréger, par la lettre grecque $\pi$, le rapport 3,1415926, etc., qui est celui du diamètre à la circonférence; et, puisque nous avons supposé le diamètre égal à l'unité [87], il est évident que ce même nombre est la longueur de la circonférence dont le diamètre est l'unité. Nous avons vu [79] que les circonférences des cercles étaient entre elles comme les diamètres; si donc on nous

demandait la longueur d'une circonférence C, dont le diamètre aurait 8 unités quelconques de longueur, nous ferions cette proportion : la circonférence, dont 1 est le diamètre, ou $\pi$ est à ce diamètre, ou 1, comme la circonférence C est à son diamètre 8; ou $\pi : 1 :: C : 8$. Dans cette proportion il n'y a d'inconnu que la circonférence C; égalant le produit des moyens à celui des extrêmes, on aura $C = 8\pi$, ou $C = 25,1327408$. Ainsi, en général, *pour avoir la longueur d'une circonférence, il faut multiplier son diamètre par le nombre* $\pi = 3,1415926$, qui représente la circonférence dont le diamètre est 1, ou le rapport de la circonférence au diamètre. On présente ce résultat d'une manière abrégée, en supposant que D est le diamètre de la circonférence C; alors cette circonférence est représentée par la formule $C = \pi D$. Si on avait pris le rayon R au lieu du diamètre, qui est égal à deux fois ce rayon, la formule deviendrait $C = 2\pi R$.

89. La surface du cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié du rayon [71]. Or, dans le cercle dont le diamètre est l'unité, la moitié du rayon est la fraction $\frac{1}{4}$, et la circonférence 3,1415926, ou $\pi$; donc $\frac{\pi}{4}$ représente la surface du cercle dont le diamètre est l'unité.

Supposons un autre cercle, dont nous désignerons la surface par surf. AB; soit son diamètre 2R, ou deux fois le rayon R. Nous pouvons comparer la surface de ce nouveau cercle avec celle du premier; et, comme les surfaces de deux

cercles sont proportionnels aux quarrés de leurs diamètres [85], nous pouvons établir cette proportion, $\frac{\pi}{4}$ : surf. AB :: 1 : $4R^2$. Égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on aura surf. AB $= \pi R^2$, c'est-à-dire que *la surface d'un cercle quelconque est égale au quarré de son rayon multiplié par le nombre constant* $\pi$.

## DES PLANS ET DES ANGLES SOLIDES.

90. Une ligne CD (fig. 56), perpendiculaire à toutes les droites qui sont dans un plan AB, et qui passent par son *pied* C, est aussi perpendiculaire à ce plan. On prouverait d'abord, ainsi que nous l'avons fait pour une perpendiculaire à une droite [9, 37, 38], que chaque point de CD est également éloigné des points E et G, pris à égale distance du point C sur la droite EG; puis on répéterait la même démonstration relativement à FH, puis à une droite quelconque tracée dans le plan AB, et passant par le pied de CD; et on en conclurait aisément qu'*une ligne, qui ne penche d'aucun côté sur le plan, lui est perpendiculaire.*

91. D'après ce que nous avons dit sur les perpendiculaires [6, 9, 11], il est évident que *la perpendiculaire est la ligne la plus courte qu'on puisse abaisser sur un plan d'un point donné au-dehors de ce plan, et qu'on ne peut abaisser d'un point donné plusieurs perpendiculaires sur un même plan.*

92. *Deux perpendiculaires abaissées de deux*

*points donnés, sur un même plan, sont nécessairement parallèles* [28 et suiv.]; car, si l'une d'elles s'inclinait dans un sens quelconque, elle ne serait plus perpendiculaire au plan.

Supposons que dans le plan AB (fig. 57) on mène une ligne droite CD, dans une direction quelconque, et que par cette ligne on conduise un nouveau plan perpendiculaire, ou incliné sur le plan AB. Deux lignes CE, DF, parallèles, tracées dans ce nouveau plan, et qui auront leur pied dans la droite CD, seront également inclinées sur le plan AB. En effet, puisqu'elles sont parallèles, la sécante CD forme avec elles des angles en C et en D, qui sont égaux [26]; mais ces angles sont l'inclinaison des deux lignes sur le plan AB : donc *deux parallèles comprises dans un même plan, qui couperait le plan* AB *sous une inclinaison quelconque, et passant par leur pied* C et D, *sont également inclinées sur* AB. Réciproquement, *deux lignes également inclinées sur un même plan, et qui se trouvent tout entières dans un plan qui couperait le premier dans la direction de leur pied, sont parallèles.*

95. *L'intersection commune de deux plans qui se coupent est une ligne droite;* car, si l'on trouvait dans leur commune intersection trois points qui ne fussent pas en ligne droite, ces trois points ne pourraient appartenir ni à l'un ni à l'autre de ces plans, puisque, selon la définition du plan [2], tous ses points doivent toucher une même droite dans quelque direction qu'on la pose sur ce plan.

94. Si deux plans AB, CD se coupent en une

ligne RS (fig. 58), et qu'on mène des perpendiculaires PO, QO, à cette droite, l'une dans le plan DC, l'autre dans AB, l'angle POQ mesurera l'inclinaison des deux plans dans toute l'étendue de leur contact. En effet, la ligne OP, promenée perpendiculairement tout le long de la ligne d'intersection RS, restera toujours dans le plan DC. Il en sera de même de la ligne QO, relativement au plan AB; par conséquent, partout où les pieds de ces deux droites se rencontreront, elles formeront le même angle POQ. Maintenant, si on faisait tourner le plan CD autour de RS, il est évident qu'on agrandirait ou qu'on diminuerait, selon le sens de la rotation, l'angle POQ, puisque les deux droites qui le forment suivraient les plans où elles sont tracées; donc l'angle, formé par les perpendiculaires PO, QO avec la ligne d'intersection, mesure l'inclinaison des deux plans au point O; et, comme ces lignes restent constamment dans ces plans pendant leur mouvement dans le sens de l'intersection RS, cet angle mesure l'inclinaison des deux plans dans toute l'étendue de leur intersection.

95. On démontre aisément que plusieurs propriétés des lignes parallèles sont applicables aux plans entre eux. Ainsi deux droites, ou deux plans compris entre deux autres plans parallèles, sont coupées en parties proportionnelles; et réciproquement [73] plusieurs plans, parallèles à un même plan, sont parallèles entre eux. Deux plans perpendiculaires à une troisième sont parallèles, ou bien se coupent suivant une droite perpendiculaire à ce troisième plan. Deux plans

parallèles, coupés par un troisième, forment des angles qui jouissent des mêmes propriétés, et qui portent le même nom que dans les lignes parallèles [26].

96. *Deux lignes droites, qui se coupent dans un même plan, déterminent la position de ce plan.* En effet, si l'on suppose que ce plan passe d'abord par une de ces lignes, et qu'on le fasse tourner sur cette ligne, comme charnière, jusqu'à ce qu'il rencontre l'autre ligne, il est évident qu'une fois que la seconde ligne touchera le plan celui-ci ne pourrait continuer son mouvement, sans s'écarter de cette dernière; par conséquent, sa position est fixée dès qu'il passe par ces deux lignes. Tout autre plan, qui passerait également par ces deux lignes, ne formerait avec le premier qu'un seul et même plan; il n'y a donc qu'un seul plan qui puisse passer par deux lignes qui se coupent dans ce même plan.

97. On nomme *angle dièdre* l'angle POQ (fig. 59), formé par l'écartement de deux plans qui se coupent réciproquement.

Si ces plans sont perpendiculaires, l'angle dièdre est droit, et c'est à cet angle qu'on rapporte tous les autres.

Les angles dièdres, ou les angles formés par des plans qui se coupent [59], sont mesurés par l'arc de cercle qu'on tracerait, avec un rayon quelconque, perpendiculairement aux surfaces de ces plans, et d'un de leurs points d'intersection comme centre.

98. *Deux plans qui se coupent* (fig. 59) *forment quatre angles dièdres* POQ, QOR, ROS, SOP,

*dont la valeur est toujours égale à quatre angles droits.* Les angles opposés au sommet, POQ, ROS, et SOP, QOR, y sont égaux, tandis que les angles adjacents SOP, POQ, etc., y sont toujours égaux à deux angles droits [22 à 26].

Si un nombre quelconque de plans se coupent en une même droite, ils forment autant de fois deux angles dièdres qu'il y a de plans coupants, et la somme de tous ces angles dièdres est toujours égale à quatre angles droits, les angles opposés au sommet étant toujours égaux.

99. Trois plans qui se coupent deux à deux, en des ligues qui ne sont pas parallèles, se rencontrent nécessairement en un point, et forment ce qu'on nomme un *angle solide trièdre* : dans l'intersection de ces trois plans on rencontre un sommet S (fig.60); trois côtés ou arêtes SA, SB, SC; trois angles plans ASB, BSC, ASC; trois angles dièdres formés par les intersections des plans ASB et BSC, BSC et ASC, ASB et ASC; et enfin l'angle en S, qui est l'angle trièdre.

Si quatre plans se réunissaient en un même point, en se coupant deux à deux, l'espace compris entre ces plans formerait un *angle solide tétraèdre*, qui renfermerait un sommet, quatre angles plans, quatre angles dièdres et quatre côtés ou arêtes.

En général, on nomme *angle solide polyèdre* l'espace angulaire formé par plusieurs angles plans qui se réunissent en un même sommet.

## DES POLYÈDRES.

400. Supposons que du sommet d'un angle polyèdre on laisse pendre un fil à plomb, et que, perpendiculairement à ce fil, on mène un plan qui coupe tous ceux de l'angle solide, les plans de l'angle polyèdre seront coupés par ce nouveau plan en des lignes droites qui formeront un triangle, un quarré, un rectangle, un quadrilatère ou un polygone quelconques, suivant que cet angle sera trièdre, tétraèdre ou polyèdre, et on aura séparé ainsi un solide isolé, qui, suivant sa forme, a reçu diverses dénominations.

On appelle *solide polyèdre*, ou simplement *polyèdre*, tout solide terminé par des plans ou des surfaces planes, qui par leur intersection forment des angles polyédriques. Ces polyèdres peuvent être *réguliers* ou *irréguliers*; nous ne nous occuperons que des premiers.

Il faut au moins quatre plans pour former le polyèdre le plus simple. Divers polyèdres ont reçu des noms particuliers; on appelle

*Tétraèdre* le solide qui a quatre faces;
*Hexaèdre*, celui qui a six faces;
*Octaèdre*, celui qui a huit faces;
*Dodécaèdre*, celui qui a douze faces;
*Icosaèdre*, celui qui a vingt faces.

401. Si on suppose un polygone quelconque régulier, tel que ABCDEF (fig. 61), et qu'une droite perpendiculaire au plan de ce polygone, et qu'on nomme *génératrice* [4], soit assujettie, en

se mouvant, à suivre le contour du polygone, en restant toujours perpendiculaire, on aura tracé le polyèdre nommé *prisme* par les géomètres. Le polygone se nomme la *base* du prisme. En coupant ce prisme parallèlement à sa base, on obtient pour section le polygone *abcdef*, semblable au premier, et la distance du centre d'un de ces polygones au centre de l'autre est la *hauteur* du prisme.

Le prisme est *triangulaire*, lorsque sa base est uu triangle; *quadrangulaire*, quand sa base est un quadrilatère; *pentagonal*, *hexagonal*, etc.

On pourrait supposer qne la génératrice, au lieu d'être perpendiculaire au plan du polygone, cas dans lequel on dit que le prisme est *droit*, est inclinée d'une manière quelconque; alors le prisme devient *oblique*, et sa hauteur est la ligne AC (fig. 62), qui s'élève perpendiculairement du centre A du polygone inférieur, jusqu'à ce qu'elle rencontre à angle droit en C une autre ligne prolongée, qui, du centre B du second polygone, se prolonge parallèlement au plan de ce polygone jusqu'en C.

102. Un *parallélipipède* est un prisme qui a pour base un parallélogramme. Dans ce cas, le prisme est entièrement formé de parallélogrammes, et deux faces opposées quelconques peuvent indistinctement être prises pour la base.

Le parallélipipède est *droit*, lorsque la droite génératrice [4, 100], ou les arêtes du solide, sont perpendiculaires à la base; *rectangle*, quand, étant droit, la base est un rectangle.

Un *cube* est un parallélipipède droit et rectan-

gle, dont la base est un quarré, et dont la hauteur est égale au côté du quarré de la base. Le cube est donc un hexaèdre dont les six faces sont égales.

103. La *pyramide* est un solide formé par plusieurs plans triangulaires, partant d'un même point S (fig. 63), et terminés au même plan polygonal ABCDEF, qu'on appelle sa *base*; le point S en est le *sommet*.

Le polygone de la base peut être un triangle, un quadrilatère, un polygone quelconque; et, dans ce cas, la pyramide est dite *triangulaire* (figure 60), *quadrangulaire* ou *polygonale* (fig. 63). Le tétraèdre est une pyramide triangulaire.

On entend par *hauteur* d'une pyramide la distance du sommet à sa base, ou la perpendiculaire abaissée du sommet sur cette base.

La *diagonale* d'un polyèdre est la ligne qui joint les sommets de deux angles solides non adjacents.

104. Nous avons fait connaître [29] les conditions nécessaires pour que deux triangles soient égaux; si nous remplaçons ici les lignes par des surfaces, on en tirera aisément ces conclusions, que deux pyramides triangulaires sont égales :

1° quand trois faces de l'une sont égales à trois faces de l'autre;

2° Quand deux faces et l'angle plan qu'elles comprennent sont égaux de part et d'autre;

3° Quand une face et les trois angles plans auxquels appartient cette face sont égaux de part et d'autre.

4° Quand les six arêtes sont égales de part et d'autre.

105. Soit le solide polygonal quelconque ABCDE, *abcde* (fig. 64); d'un point intérieur quelconque O on peut mener des droites aux extrémités des arêtes B*b*, C*c*, on formera ainsi une pyramide polyèdrique OB*b*C*c*, et il est aisé de voir qu'en opérant de même sur chacune des faces du polyèdre on le décomposerait, en totalité, en autant de pyramides polyèdriques qu'il a de faces. Les pyramides ont pour bases des polygones B*b*C*c*, A*a*B*b*, *abcde*, ABCDE, etc. : or nous avons vu [42] que tout polygone pouvait toujours être divisé en triangles; ainsi toutes les pyramides polygonales pourront être décomposées en plusieurs pyramides à bases triangulaires : donc *tout polyèdre régulier peut être décomposé en pyramides triangulaires*, dont le sommet serait placé en un point O dans l'intérieur de ce polyèdre.

106. Deux polyèdres, pour être semblables, [75, 76], exigent, 1° que les faces homologues soient semblables; 2° que les angles solides homologues soient égaux.

Quand ces conditions sont remplies, les arêtes homologues sont également inclinées sur les faces homologues, et les arêtes et les diagonales homologues sont proportionnelles.

Deux polyèdres semblables peuvent se partager en un même nombre de pyramides triangulaires semblables, chacune à chacune, et semblablement placées; ce qui est évident, puisque les faces homologues sont semblables, les angles solides homologues égaux, et les arêtes homologues également inclinées. Les arêtes et les faces de ces pyramides, dans les deux polyèdres,

sont évidemment proportionnelles, puisque les arêtes, les diagonales et les faces homologues de ces polyèdres le sont elles-mêmes.

## DE LA MESURE DES AIRES ET DE LA SOLIDITÉ DES POLYÈDRES.

107. *Pour avoir l'aire d'un polyèdre*, c'est-à-dire le nombre d'unités superficielles que contient sa surface, *il faut faire la somme des aires de ses faces*. Ce qui n'offre aucune difficulté d'après les principes exposés.

On nomme *surface convexe* d'un prisme la surface de ses côtés, ou sa surface non compris les deux bases. Il est évident que chaque parallélogramme, qui compose cette surface convexe, a pour mesure de sa surface sa base par sa hauteur; or, dans le prisme droit régulier, tous les parallélogrammes qui composent ses faces ont même hauteur, et toutes leurs bases forment le contour de la base du prisme; donc *la surface convexe du prisme égale le contour de sa base multiplié par sa hauteur.*

La pyramide polygonale régulière étant composée d'une suite de surfaces triangulaires semblables (fig. 63), son aire convexe sera égale à la somme des surfaces de tous ces triangles. Or, chacun de ces triangles a pour mesure les côtés AB, ou BC, ou CD de la base, multipliés par la moitié de la hauteur de chaque triangle [68]; toutes ces hauteurs sont égales; donc *la surface convexe de la pyramide égale le contour de sa*

*base multiplié par la demi-hauteur d'une de ses faces.*

107 *bis.* Si la pyramide était tronquée, parallèlement à sa base, il est évident que chacune de ses faces deviendrait un trapèze dont il serait facile de mesurer la surface [65]; la surface convexe de la pyramide tronquée serait égale à la somme de ces trapèzes, et il est aisé de conclure que *la surface convexe de la pyramide tronquée égale la hauteur d'une de ses faces multipliée par la demi-somme du contour des deux bases*, ou *la hauteur d'une de ses faces multipliée par le contour d'un polygone qui aurait même nombre de côtés que les bases, et qui passerait par le milieu de toutes les arêtes.*

108. De même qu'on a choisi le quarré pour servir d'unité de mesure aux surfaces, on prend le cube pour mesurer le *volume* des solides, ou leur *solidité.*

On nomme *mètre cube* le cube dont toutes les arêtes sont égales à un mètre : c'est lui qui sert d'unité de volume; par conséquent *le volume d'un solide*, ou *sa solidité*, est le nombre qui exprime combien de fois le mètre cube est renfermé dans ce solide. *Cuber* un solide, c'est déterminer combien de fois il contient le cube pris pour unité, ou le mètre cube.

On peut prendre pour unité de mesure toute autre longueur que le mètre, telle que le pied, le pouce, etc.

108 *bis.* Si nous désirions savoir combien le parallélipipède rectangle ABCDE, etc. (fig. 65), contient de mètres cubes, nous commencerions

par vérifier que le côté AB de la base a pour longuenr 5 parties égales à un mètre, puis l'autre côté BC 9 parties ; et, en multipliant ces deux nombres, nous aurions 45 mètres quarrés pour la superficie de la face ABCD. Maintenant supposons que sur chacun de ces mètres quarrés on pose un cube de un mètre en tout sens, nous pourrons ainsi placer sur la face ABCD 45 de ces cubes; et, comme la hauteur AE du parallélipipède AB est égale à 5 mètres, il s'ensuivrait qu'on pourrait former ainsi 5 lits successifs de 45 cubes chacun, ou que 225 cubes de un mètre occuperaient toute la solidité du parallélipipède : donc, *pour avoir la solidité d'un parallélipipède, il faut multiplier l'aire de sa base par sa hauteur.*

109. Quand les trois dimensions du solide, en longueur, largeur et hauteur, sont égales, nous avons vu que le solide était un cube [102]. Si les arêtes ou côtés de ce cube sont égales à l'unité de mesure, sa solidité sera égale à $1 \times 1 \times 1 = 1$. Si les arêtes ont deux fois la longueur de l'unité de mesure, la solidité sera $2 \times 2 \times 2 = 8$; et en général, pour tout autre cube, la longueur d'une arête, multipliée deux fois par elle-même. De là vient qu'en arithmétique on appelle *cube* d'un nombre le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même. Voici les cubes des dix premiers chiffres de notre système de numération :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffres | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10. |
| Cubes | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000. |

En géométrie, il serait très-facile de vérifier qu'un cube, dont le côté contiendra un nombre

de mètres égal à l'un des chiffres de la première ligne, aurait pour solidité un nombre de mètres cubes égal à ceux de la seconde.

110. *La solidité d'un prisme triangulaire est égale au produit de l'aire de sa base par sa hauteur;* car ce prisme est la moitié d'un parallélipipède de même hauteur et d'une base double, puisque le rectangle qui sert de base au parallélipipède peut être partagé en deux parties égales par un plan diagonal, et former ainsi deux prismes triangulaires semblables.

*La solidité d'un prisme polygonal quelconque est égale à l'aire de sa base multipliée par sa hauteur,* puisqu'on peut décomposer le prisme polygonal en autant de prismes triangulaires de même hauteur qu'on peut former de triangles dans le polygone de la base [42].

111. Imaginons un prisme triangulaire ABCDEF (fig. 66) : si on conçoit un plan qui coupe ce prisme par l'angle F, et qui passe par les diagonales FA, FC, et par le côté AC, la section séparera du prisme une pyramide triangulaire AFCB, qui a même base ABC que le prisme, et même hauteur FB. Il reste une pyramide quadrangulaire FADEC, que nous pouvons partager en deux autres pyramides FDCE, FDAC, qui seroient évidemment égales comme ayant même hauteur, puisqu'elles ont leur sommet au même point F, et des bases égales comme moitiés du rectangle ADEC. Mais la pyramide FDCE est elle-même égale à la piramide A FBC, puisque ces pyramides ont même base (le triangle ABC étant égal au triangle DFE) et même hauteur BF = CE;

donc les trois pyramides sont égales, et, par conséquent, une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme de même base et de même hauteur; *et une pyramide triangulaire a pour solidité le tiers du prisme de même base et de même hauteur.*

On voit ainsi qu'un prisme régulier quelconque peut toujours être décomposé en pyramides triangulaires de même base et de même hauteur.

112. Il est facile maintenant de trouver la solidité d'une pyramide quelconque. Cette solidité sera égale à *l'aire de la base multipliée par le tiers de la hauteur.*

Une pyramide polygonale pouvant se décomposer en autant de pyramides triangulaires qu'on peut former de triangles dans le polygone de sa base, il est évident que *la solidité de la pyramide polygonale est encore égale à l'aire de sa base multipliée par le tiers de sa hauteur.*

Pour avoir la solidité d'une pyramide tronquée, ou coupée parallèlement à sa base, on suppose que la pyramide est entière, ou que ses arêtes vont se joindre en un même sommet. On calcule la solidité de la pyramide dans cette hypothèse; puis, calculant la solidité de la petite pyramide qui a servi à compléter la première, on retranche ce dernier produit du premier; le reste est la solidité de la pyramide tronquée.

113. Nous avons vu que tout polyèdre pouvait être décomposé en autant de pyramides polygonales qu'il avait de faces [105], en prenant un point intérieur pour sommet de toutes ces pyramides, et que chacune de ces pyramides pouvait à son tour être décomposée en pyramides

triangulaires : donc, en décomposant ainsi en pyramides triangulaires un polyèdre quelconque, on pourrait calculer sa solidité.

### DES POLYÈDRES SEMBLABLES ET DU PRISME.

114. Puisque l'aire de la surface d'un polyèdre est égale à la somme des aires de ses faces [107], il est évident que, si on lui compare un polyèdre semblable, les surfaces de ces deux polyèdres seront comme les aires des faces homologues; mais ces surfaces sont elles-mêmes entre elles comme les quarrés des côtés homologues [82, 85] : donc *les aires des surfaces de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues.*

115. Soient deux parallélipipèdes semblables X et X′, dont les hauteurs soient H et H′, et les aires des bases B et B′; les surfaces de ces parallélipipèdes seront entre elles comme les aires de leurs bases B et B′, c'est-à-dire qu'on aura surface $X : B ::$ surf. $X' : B'$; mais les deux surfaces des parallélipipèdes sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues, ou des hauteurs H, H′ [83]; on aura donc cette autre proportion : surf. $X : H^2 ::$ surf. $X' : H'^2$; mettant à la place du rapport des surfaces les rapports des bases qui leur sont proportionnels, on aura $B : H^2 :: B' : H'^2$; égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, on aura $BH'^2 = B'H^2$; puis multipliant chacun des membres de cette égalité par la même quantité $HH'$, ce qui ne

change en rien leur rapport, il viendra $HH'BH'^2 = HH'B'H^2$, ou $BH : B'H' :: H^2 : H'^2$; BH et $B'H^2$ expriment la solidité des deux parallélipipèdes, puisque B et B' sont les aires de leurs bases, et H et H' leurs hauteurs [110] : donc *les solidités de deux parallélipipèdes semblables sont entre elles comme les cubes de leurs côtés homologues.*

116. On déduit facilement de là que *les solidités de deux pyramides triangulaires semblables, ou de deux pyramides polygonales semblables sont entre elles comme les cubes de leurs hauteurs.*, puisqu'une pyramide triangulaire est le tiers de la solidité d'un prisme triangulaire [111], et qu'une pyramide polygonale peut toujours être décomposée en pyramides triangulaires [112].

De même deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de pyramides triangulaires semblables [105, 106 et 115]; donc *les solidités de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les cubes de leurs côtés homologues.*

117. Tout prisme triangulaire ABCDEF (fig. 67), dont les faces de la base ABC, et celle du sommet DEF, ne seraient pas parallèles, peut de même que le prisme régulier [111] être décomposé en trois pyramides EABC, EACF, EADF : or la première de ces pyramides a ABC, pour base BE pour hauteur, et pour solidité $\frac{1}{3}$ BE $\times$ ABC : la seconde pyramide ayant ACF pour base, et son sommet en E, est équivalente à la pyramide ayant en B son sommet, et ACF pour base, ou, ce qui revient au même, ayant ABC pour base,

CF pour hauteur, et pour solidité $\frac{1}{3}$CF $\times$ ABC ; la troisième pyramide EADF est évidemment équivalente à la pyramide qui aurait son sommet en B, et pour base ACF, ou qui aurait pour base ABC, pour hauteur AD, et dont la solidité serait $\frac{1}{3}$AD $\times$ ABC. Réunissant la solidité de ces trois pyramides pour avoir celle du prisme tronqué ABCDEF, nous aurons pour la solidité de ce prisme ABC $\times \frac{1}{3}$ (AD + BE + CF) : donc *la solidité du prisme triangulaire tronqué*, ou dont la surface de la base n'est pas parallèle avec celle du sommet, et où les arêtes sont perpendiculaires à la base, *est égale à la surface de la base multipliée par le tiers de la somme des trois arêtes.*

Tout prisme polygonal pouvant être décomposé en prismes triangulaires [110], il est aisé de démontrer que *dans tout prisme, ou tronc de prisme polygonal, ayant ses arêtes perpendiculaires à sa base, la solidité est égale à la surface de la base multipliée par la somme de toutes les arêtes, et divisée par le nombre de ces mêmes arêtes.*

## DU CYLINDRE.

118. Une ligne droite AB (fig. 68), perpendiculaire au plan d'un cercle BDE, et qui serait assujettie à suivre le contour de ce cercle, en restant perpendiculaire à elle-même, engendrerait un solide ABDEFG, auquel on a donné le nom de *cylindre*. Les cercles parallèles BDE, AGF

sont les *bases* du cylindre; CH, distance des bases, en est la *hauteur;* AB et EF, de même longueur que la génératrice [4], en sont les *arêtes.*

On peut encore supposer le cylindre engendré par un cercle s'avançant, parallèlement à lui-même, le long d'une droite perpendiculaire à sa surface, qui passe par son centre, telle que CH, ou qui touche sa circonférence, comme AB. D'après ce mode de génération il est aisé de voir que *toute section faite dans un cylindre, parallèlement à sa base, est un cercle égal à cette base.*

Si la génératrice est perpendiculaire à la surface du cercle, le cylindre est *droit;* si AB (fig. 69), ou la génératrice, n'était plus perpendiculaire à la base, le cylindre serait *oblique;* et, si les deux bases n'étaient pas parallèles (fig. 69 *bis*), le cylindre serait *tronqué:* ce serait un *tronc de cylindre.* Il peut exister des cylindres obliques sous toutes les inclinaisons, et des cylindres dont les bases ne sont pas circulaires.

119. Le cylindre peut être considéré comme un prisme polygonal d'un nombre infini de côtés [71, 79]; *la surface convexe* [106] *du cylindre est donc égale à la circonférence de sa base multipliée par sa hauteur.* Soit H la hauteur du cylindre, et D, le diamètre du cercle de la base, $=2R$ ou deux fois le rayon; nous avons vu [88] que $\pi D = 2\pi R$, représentait la circonférence dont le rayon était R; la surface convexe du cylindre sera donc égale à $2\pi R \times H$.

La surface des cercles des deux bases est pour chacun d'eux $\pi R^2$ [89], et pour les deux $2\pi R^2$,

puisqu'ils sont égaux ; en ajoutant la surface de ces cercles à celle de la surface convexe, on aura la surface totale du cylindre, ou $2\pi RH + 2\pi R^2$ : cette valeur peut s'écrire ainsi, $2\pi R\,(H + R)$ ; or $2\pi R$ représente la circonférence de la base, et $H + R$ la hauteur du cylindre, plus le rayon de la base : donc *la surface totale d'un cylindre droit et circulaire égale la circonférence de sa base multipliée par la hauteur plus la longueur du rayon des bases.*

120. Dans le cylindre tronqué ABDFGE (figure 69 *bis*) il est aisé de voir que la ligne perpendiculaire CH, qui joint les centres des deux surfaces qui terminent le cylindre, est moyenne arithmétique entre toutes les hauteurs quelconques AE, BB', KK', DF, etc. ; car, si par le centre H de la surface supérieure on mène la ligne IJ, parallèle au diamètre AD, il est évident qu'on aura formé deux triangles semblables EHI, JHF, dans lesquels $FJ = EI$ [69]. La hauteur DF se compose de deux parties DJ, ou plutôt CH plus FJ, ou $DF = CH + FJ$. La hauteur $AE = CH - FJ$ ; ajoutant ces deux hauteurs, on aura $DF + AE = CH + FJ + CH - FJ = 2CH$, d'où on tire $CH = \frac{DF + AE}{2}$ ; et, comme le même raisonnement aurait lieu pour deux arêtes opposées quelconques, et même pour deux hauteurs quelconques prises dans l'intérieur du cylindre, et placées, à égale distance, aux extrémités d'une droite passant par le centre, il s'ensuit que la distance CH des deux centres est moyenne arithmétique entre toutes les hauteurs qui séparent les deux surfaces qui termi-

nent le cône. *La surface convexe du cône tronqué droit et circulaire est, par conséquent, égale à la circonférence de la base, multipliée par la hauteur qui sépare le centre des deux bases* [117].

On pourrait d'ailleurs démontrer mécaniquement cette vérité, en enlevant au cylindre tronqué toute la partie GHLK'F par un plan qui couperait le cylindre parallèlement à la base, et dans la direction GL et HJ, et retournant le solide qu'on enleverait pour le placer sur GLB'EI, pour reformer ainsi un cylindre droit, puisque HF = HE, FJ = EI et HI = HJ, et qui aurait pour mesure la base multipliée par la hauteur.

120 *bis*. Les aires des polyèdres semblables sont comme les quarrés des côtés homologues [114]. Les côtés homologues, dans deux cylindres droits et circulaires, sont les rayons des bases et les hauteurs. Nous venons de voir que les surfaces totales de deux cylindres étaient proportionnelles aux quarrés des rayons des bases ; donc *ces surfaces sont encore proportionnelles aux quarrés des hauteurs.*

121. Si un cylindre peut être assimilé à un prisme polygonal d'un grand nombre de côtés [110], *la solidité du cylindre droit et circulaire tronqué* [119 *bis*], *ou non tronqué, sera donc égale à l'aire de la base multipliée par la hauteur.* Soit H la hauteur ; le rayon de la base étant R, la surface de cette base sera $\pi R^2$ [89], et la solidité du cylindre $\pi R^2 \times H$.

On en déduit que *dans deux cylindres de même hauteur les solidités ou les volumes sont comme les quarrés des rayons des bases, ou comme la surface*

*de ces bases*, et que *dans les cylindres de mêmes bases les volumes sont comme les hauteurs.*

Deux prismes semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues [116] : or deux cylindres droits et circulaires étant des figures semblables, et les rayons des bases, ou les hauteurs étant les côtés homologues de ces cylyndres, on tire aisément de là que *dans deux cylindres droits et circulaires les volumes, ou solidités, sont comme les cubes des rayons des bases ou des hauteurs.*

### DU CONE.

122. Une ligne droite AB (fig. 70), qui, passant constamment par un point A, suivrait le contour du cercle BED, décrirait un cône ABED, dont le point A est le *sommet*, et les droites AB, AD, etc., sont les *arêtes*. Quand le sommet A se trouve exactement au-dessus du centre C du cercle de la base, le cône est appelé *droit circulaire*, ou cône régulier ; AC, perpendiculaire à la surface du cercle, est la hauteur ou l'axe du cône. Dans le cône droit circulaire toutes les arêtes sont égales.

Dans le cône *oblique* le sommet A (fig. 71) n'est plus au-dessus du centre du cercle de la base, et les arêtes AB, AD ne sont plus égales entre elles ; l'axe AC n'est pas perpendiculaire à la surface du cercle.

Il peut exister des cônes circulaires obliques sous toutes les inclinaisons possibles, et des cônes droits, ou obliques, dont la base n'est pas un cercle.

122 *bis*. On peut encore supposer, dans le cône droit et circulaire, que le triangle rectangle ABC tourne autour de l'axe AC, comme pivot, et qu'après avoir décrit la circonférence entière BED, sa trace forme le cône ABED.

Comme chaque point de l'hypothénuse AB, dans ce mouvement, reste toujours également éloigné de la circonférence de la base, et décrit elle-même une circonférence, il s'ensuit que toute section du cône droit circulaire, parallèlement à sa base, est un cercle.

Quand on a retranché ainsi, par une section parallèle à la base, la partie supérieure d'un cône, il reste un solide terminé par deux surfaces de cercles, qu'on nomme *tronc de cône*, ou *cône tronqué*.

123. Le cône droit et circulaire peut être considéré comme une pyramide polygonale d'un très-grand nombre de côtés; la hauteur des triangles infiniment petits qui composeraient cette pyramide devient ici égale à la longueur des arêtes [107] : donc *la surface convexe du cône égale la circonférence de la base multipliée par la moitié de la longueur d'une arête*.

Soit L cette longueur et R le rayon de la circonférence de la base, on aura la formule $\pi RL$ pour cette surface convexe.

Deux cônes, dont les arêtes sont égales, ont donc leurs surfaces convexes proportionnelles aux rayons de leurs bases; et, quand les rayons sont égaux, ces surfaces sont comme les longueurs des arêtes.

La surface convexe d'un cylindre, dont la hau-

teur serait égale au rayon de la base, serait $2\pi R^2$ [119]; celle d'un cône, dont la longueur de l'arête serait encore égale au rayon de la base, serait $\pi R^2$ : donc *un cône, qui a pour longueur de ses arêtes le rayon de sa base, a une surface convexe moitié de celle du cylindre de même base, et d'une hauteur égale au rayon de cette base*, ou bien *un cylindre et un cône de même base, et dont la hauteur de l'un et l'arête de l'autre égalent le rayon de cette base, ont leurs surfaces convexes, qui sont comme 2 est à l'unité.*

124. Le cercle qui forme la base du cône a pour surface $\pi R^2$; la surface convexe est représentée $\pi RL$; en ajoutant ces deux surfaces, on aura la surface totale du cône, $\pi R^2 + \pi RL$, qu'on écrira $\pi R\,(R + L)$ : or $\pi R$ est égal à la demi-circonférence de la base, et $R + L$ à la somme du rayon de cette base et de la hauteur de l'arête; donc *la surface totale d'un cône droit égale la demi-circonférence de sa base multipliée par la somme du rayon de la base et de la hauteur de l'arête*, ou bien *égale la circonférence de sa base multipliée par la demi-somme du rayon de sa base et de la hauteur d'une arête.*

La surface totale d'un cylindre, dont la hauteur égalerait R ou le rayon de la base, serait $4\pi R^2$ [119]; celle du cône, dont l'arête serait R, serait $2\pi R^2$. Ces deux surfaces seraient donc encore dans le rapport de 2 à l'unité [123].

On trouve aisément la surface convexe du cône tronqué, quand on connaît celle de la pyramide tronquée [107 *bis*]. Ici la hauteur d'une des faces devient partout égale à la hauteur d'une arête;

donc *la surface convexe du tronc de cône tronqué égale la longueur d'une des arêtes multipliée par la demi-somme des circonférences des deux bases, ou la longueur d'une arête multipliée par la circonférence qui passerait, parallèlement aux bases, par le milieu de toutes les arêtes* [69, 107 *bis*].

125. En considérant le cône comme une pyramide d'une infinité de côtés, on trouve de suite que *la solidité du cône est égale au produit de la surface de sa base par le tiers de sa hauteur :* soit H cette hauteur, $\pi R^2$ la surface de la base; lorsque le rayon du cercle $= R$, la solidité du cône sera $\frac{1}{3}\pi R^2 \times H$.

La solidité d'un cylindre, qui aurait H pour hauteur, serait $\pi R^2 \times H$ [121]; celle d'un cône de même hauteur et de même base serait $\frac{1}{3}\pi R^2 \times H$ : donc *la solidité d'un cône est le tiers de celle d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

Pour avoir la solidité d'un cône tronqué, on opère comme on a fait pour la pyramide [112] : de la solidité du cône, supposé entier, on retranche la solidité du petit cône qui a été enlevé, le reste est le volume du tronc de cône restant.

126. Deux cônes sont semblables, lorsque les rayons de leurs bases, leurs hauteurs, et leurs arêtes sont proportionnels [74]; d'où il est aisé de conclure 1° que *les aires des cônes semblables sont entre elles comme les quarrés des rayons, des hauteurs ou des arêtes;* 2° que *les solidités sont entre elles comme les cubes de ces mêmes lignes* [116, 121].

DE LA SPHÈRE.

127. Une demi-circonférence ADB (fig. 72), qu'on ferait tourner autour du diamètre AB, aurait tracé, après avoir fait une révolution entière, une surface ronde qu'on a nommée *sphère*.

Chacun des points de la circonférence du cercle ADB est à égale distance du centre C; dans son mouvement autour du diamètre AB, tous les points de cette circonférence, en tournant régulièrement, ont conservé leur distance à ce centre; le point C, qu'on nomme *centre* de la sphère, est donc également éloigné de tous les points de la surface de la sphère. Les droites, qui vont de ce centre à un point quelconque de la surface, sont les *rayons* de la sphère, et il est aisé de prouver qu'ils sont tous égaux [45].

128. La ligne qui, passant par le centre, coupe la surface en deux points diamétralement opposés, est un *diamètre*, qui est double du rayon. Toute autre droite, qui coupe la surface en deux points, sans passer par le centre, est une corde. Il est évident que tous les diamètres sont égaux [46].

On suppose qu'un plan APIFBG, passant par le centre, coupe la surface de la sphère; cette section sera nécessairement un cercle, puisqu'elle a lieu dans une des positions qu'a dû prendre le demi-cercle générateur ADB dans son mouvement autour de AB. Tout cercle qui passe ainsi par le centre est appelé un *grand cercle*.

Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales, puisque leur intersection commune passe par le centre, et est un diamètre.

Il n'est pas difficile de démontrer que tout grand cercle partage la sphère en deux parties égales [46].

129. Quand le plan coupant ne passe plus par le centre, mais opère, par exemple, une section suivant HIKL, la corde HL, dans son mouvement circulaire, ne cesse pas d'être perpendiculaire au diamètre AB, et ne varie pas de longueur; son extrémité trace donc un cercle tout entier sur la sphère, et qui est plus petit que celui tracé par le rayon DC. Ces cercles HIKL, MPNO, qui ne passent pas par le centre, et dont on reconnaît qu'un nombre infini peut être tracé en coupant la sphère en tous sens, ont reçu le nom de *petits cercles*.

Les centres L et O des petits cercles, et celui C de la sphère, sont sur une même droite AC, perpendiculaire aux plans des petits cercles.

Toute demi-corde HL est plus petite que le diamètre DE; et elle est d'autant plus petite qu'elle s'éloigne davantage du centre de la sphère; les petits cercles sont donc d'autant plus petits qu'ils sont plus loin du centre de la sphère.

150. Proposons-nous de trouver la valeur de la surface de la sphère qui, ayant AB (fig. 73) pour diamètre, aurait été engendrée par la révolution du demi-cercle ADEFB. Menons les demi-cordes DG, EH, FI, perpendiculaires au diamètre AB. Par les points D, E, F, où ces cordes coupent la

circonférence, abaissons les perpendiculaires DK, EL, et par le milieu de ces perpendiculaires menons des cordes MO, NP, puis enfin joignons les points M et N, où ces nouvelles cordes coupent la circonférence, avec le centre C, au moyen des rayons MC, NC. Maintenant, si nous faisons tourner les arcs DE, EF, autour du diamètre AB, il est clair qu'ils décriront des troncs de cônes, dont les arêtes seront ces arcs eux-mêmes, qu'on peut supposer être assez petits pour qu'on puisse, sans erreur sensible, les prendre pour des lignes droites. Le tronc de cône, décrit par l'arc DE, a pour surface convexe l'arête DE multipliée par la circonférence dont MO est le rayon [124]. Soit $MO = r$, cette surface convexe sera égale à $2\pi r \times DE$.

Maintenant l'arc DE, étant supposé assez petit pour être considéré, sans erreur sensible, comme une ligne droite, le triangle DEK sera semblable au triangle COM, puisque leurs côtés homologues sont perpendiculaires [76]. Ces côtés sont donc proportionnels et en nommant R le rayon CM du cercle, nous aurons cette proportion, $DE : CM$ ou $R :: DK : MO$ ou $r$; tirant de cette proportion la valeur de DE [63] nous aurons, $DE = \frac{R \times DK}{r}$, et mettant cette valeur dans l'expression de la surface du cône tronqué $2\pi r \times DE$, et effaçant le rayon $r$ qui se trouve au numérateur et au dénominateur, il viendra $2\pi \times R \times DK$, ou $2\pi R \times DK$.

La révolution d'un autre arc EF donnerait de même un second cône tronqué, dont la surface

aurait pour mesure $2\pi R \times EL$; et ainsi de suite pour tous les cônes tronqués possibles en lesquels on pourrait décomposer la surface de la sphère; la surface de tous ces cônes égalerait celle de la sphère, et on aurait $2\pi R$ (DK + EL +, etc.) pour cette surface: or les quantités DK, EL, sont égales aux parties GH, HI du rayon, et il est aisé de voir qu'en faisant la somme de tous les cônes, les lignes DK, EL finiraient par égaler le rayon AC ou R, puis, pour la sphère entière, le diamètre AB = 2R: donc *la surface entière de la sphère sera égale à* $2\pi R \times 2R$, *ou à* $4\pi R^2$ *ou à quatre fois le quarré du rayon multiplié par le nombre constant* $\pi$.

131. La quantité $\pi R^2$ représente la surface d'un grand cercle de la sphère, et $4\pi R^2$ est égal à quatre fois cette surface, donc *la surface de la sphère est égale à quatre fois la surface d'un grand cercle.*

Si $2\pi R$ représente la circonférence d'un grand cercle de la sphère, il est encore évident, d'après la formule $2\pi R \times 2R$, que *la surface de la sphère égale la circonférence d'un grand cercle multipliée par deux fois son rayon ou par son diamètre.*

132. Un cylindre dont le rayon de la base serait égal à celui de la sphère, et qui aurait pour hauteur le double du rayon ou le diamètre de la sphère, aurait évidemment pour surface convexe $4\pi R^2$ [119]: donc *la surface de la sphère est égale à la surface convexe du cylindre dont le rayon de la base serait égal à celui de la sphère, et qui aurait pour hauteur le diamètre de cette sphère.* On voit dans ce cas que le cylindre est *circonscrit* à la sphère parce qu'il est évident que l'intérieur d'un

pareil cylindre contiendrait la sphère tout entière. (fig. 73 bis).

Un pareil cylindre a donc sa surface convexe égale à la surface de quatre grands cercles [131]; en y ajoutant les deux grands cercles des deux bases, *la surface totale du cylindre circonscrit sera égale à six grands cercles.* Or la sphère n'équivaut qu'à quatre de ces cercles; *la surface de la sphère est donc à la surface totale du cylindre circonscrit comme 4 est à 6 ou comme 2 est à 3.*

133. Le cône dont le rayon de la base serait R, et dont la longueur de l'arête égalerait quatre fois ce rayon, aurait encore pour surface convexe $4\pi R^2$. Ainsi *la surface de la sphère est la même que celle d'un cône dont la base a le même rayon et dont la longueur de l'arête égale quatre fois le rayon de la sphère.*

Toutes les sphères sont des figures semblables. Une sphère dont le rayon serait R aurait pour surface $4\pi R'^2$; et en la comparant avec la première, on verrait que *les surfaces de deux sphères sont entre elles comme les quarrés des rayons.*

134. Si l'on suppose que deux plans parallèles coupent la sphère suivant les cordes DG, EH, (fig. 75), on aura une partie de la surface de la sphère qu'on nomme une *Zone*; les plans qui passent par DG et EH sont les bases de cette zone et dans ce cas la zone est dite à deux bases; GH est alors sa hauteur.

L'un des plans aurait pu être tangent à la sphère au point A, et l'autre la couper suivant EH; dans ce cas la zone n'a qu'une seule base, et AH est sa hauteur.

On peut encore supposer que les zones sont engendrées par la révolution autour du diamètre AB de l'arc DE dans la zone à deux bases, et de l'arc AE dans la zone à une base.

155. Rien de plus facile à trouver que la surface d'une zone, d'après ce que nous avons dit [150]: la surface du cône tronqué décrit par l'arc DE est égale à $2\pi R \times DK$ ou $2\pi R \times GH$; et la surface de ce cône est exactement celle de la zone.

De même si nous voulons avoir la surface de la zone décrite par AE, les mêmes principes serviront à décomposer cette zone en plusieurs cônes tronqués, qui additionnés ensemble auront pour surface $2\pi R \times AH$.

Maintenant $2\pi R$ est la circonférence d'un grand cercle de la sphère, et GH, AH sont les hauteurs des deux zones: donc *la surface d'une zone sphérique quelconque est égale à la hauteur de cette zone multipliée par la circonférence d'un grand cercle.*

Il est évident que deux zones d'une même sphère sont entre elles comme leurs hauteurs; que deux zones de même hauteur, dans des sphères différentes, sont comme les rayons de ces sphères; enfin qu'une zone est à la surface de la sphère comme la hauteur de la zone est au diamètre.

156. Deux grands cercles de la sphère ABD, AED (fig. 74), qui se coupent aux extrémités A et D d'un même diamètre, laissent entre eux une surface ABDEA, qu'on a nommée *fuseau* sphérique. Pour avoir la mesure de la surface du fuseau, on mène perpendiculairement au diamètre AB un grand

cercle BEF. La surface de ce fuseau est contenue, autant de fois dans la sphère que l'arc BE est contenu de fois dans le cercle BEF; l'arc BE sert de mesure à l'angle dièdre BCE. Désignons donc par A le nombre de degrés de l'arc BE. Nous avons vu [58] que le nombre de degrés contenus dans le cercle entier était de 360. Nous aurons donc, en désignant par F l'aire du fuseau, et par S celle de la sphère, cette proportion, $F . S :: A : 360°$; d'où $F = \frac{S \times A}{360}$ : or $S = 4\pi R^2$ donc $F = \frac{4\pi R^2 A}{360°}$; si $A = 90°$ ou l'angle droit, ou bien $180°$ ou la demi-circonférence ou bien la circonférence entière, on aura $F = \pi R^2 = 2\pi R^2 = 4\pi R^2$, ce qui est évident.

137. Nous avons vu que la solidité d'un cône circulaire et droit était le tiers de celle d'un cylindre de même base et de même hauteur [125]. Ceci s'applique à tous les cônes engendrés par un triangle quelconque AEC (fig. 75) [122]. En effet, abaissons la perpendiculaire FE sur AC, si on suppose que le rectangle ABCD fasse une révolution autour du côté AC il engendrera un cylindre qui aura pour solidité $\pi R^2 \times AC$, en prenant $CD = R$ ou pour le rayon. Le triangle rectangle AEF, par sa révolution, engendrera un cône qui sera le tiers de la partie cylindrique engendrée par le rectangle ABFE, et dont la solidité sera $\frac{1}{3} \pi R^2 \times AF$, De même le cône engendré par le triangle FEC sera le tiers du cylindre que le rectangle FCDE formera par sa révolution, ou $\frac{1}{3} \pi R^2 \times FC$: donc les deux cônes engendrés par le triangle ACE

auront pour solidité $\frac{1}{3}\pi R^2$ ( AF + FC ) ou $\frac{1}{3}\pi R^2 \times AC$, ou enfin le tiers du cylindre décrit par la révolution du rectangle ACBD.

Si le triangle avait la forme AEG, la perpendiculaire EF tomberait alors au-dessous du point G, et le solide engendré par AEG serait la différence des cônes décrits par AEF et GEF; mais en même temps le cylindre décrit par ABHG serait la différence des cylindres décrits par ABEF et GHEF: donc le solide décrit par la révolution du triangle serait encore le tiers du cylindre décrit par la révolution du rectangle de même base et de même hauteur.

158. Dans la circonférence ABCD (fig. 76), traçons le polygone régulier BC, CD, etc. Des points B, C, D, menons les cordes BF, CG, DH, perpendiculaires au diamètre, et joignons ces mêmes points avec le centre O. Proposons-nous maintenant de trouver la mesure du solide engendré par le triangle DOC, tournant autour du diamètre AN.

Prolongeons le côté DC du triangle DCI jusqu'à ce qu'il rencontre en M le diamètre AN également prolongé. Le triangle MDO, en tournant autour de MO, engendrera un cône qui aura pour mesure $\frac{1}{3}\pi DH^2 \times MO$ [157]; le triangle MCO engendrera un solide ayant pour mesure $\frac{1}{3}\pi CG^2 \times MO$; enfin le solide décrit par le triangle DOC, étant la différence de ces deux cônes solides aura pour mesure $\frac{1}{3}\pi MO\,(DH^2 - CG^2)$.

159. Sur le milieu du côté DC du polygone

menons le rayon perpendiculaire OE puis EL parallèle à DH et CG. Maintenant $DH = CG = 2EL$ [69] et $DH - CG = DI$; multipliant ces deux égalités membre à membre, et effaçant la quantité $DH \times CG$, qui se détruit comme ayant eu même temps les signes + et —, il viendra $DH^2 - CG^2 = 2EL \times DI$. Substituant dans la mesure du solide trouvé au paragraphe précédent, il viendra pour cette mesure $\frac{2}{3}\pi MO \times EL \times DI$.

Les triangles DCI, OLE, ayant leurs côtés homologues perpendiculaires sont semblables, et ces côtés homologues sont proportionnels [76], c'est-à-dire qu'on a $DI : CI :: OL : EL$; tirant de cette proportion la valeur de DI [63], nous aurons $DI = \frac{CI \times OL}{LE}$, et la substituant dans l'expression du solide, en effaçant EL qui se trouve au numérateur et au dénominateur, celle-ci deviendra $\frac{2}{3}\pi MO \times CI \times OL$.

Les triangles DCI, OLE donnent encore la proportion $DC : DI :: OE : OL$;
mais le triangle DCI, rectangle en I, a de plus l'angle DCI égal à l'angle M du triangle MOE, puisque DC et ME sont parallèles, et qu'il en est de même de CI et de MO perpendiculaires à la corde DH; le troisième angle CDI est donc égal à l'angle MOE du grand triangle, rectangle lui-même en E: ces deux triangles sont donc semblables [77], et leurs côtés homologues étant proportionnels donnent,

$$DC : DI :: MO : OE.$$

Les deux premiers termes de cette proportion et de la précédente étant semblables, les autres sont proportionnels et donnent cette autre proportion,

$$MO : OE :: OE : OL;$$

tirant la valeur de $MO = \frac{OE^2}{OL}$ pour la substituer dans l'expression de la mesure du solide, on aura pour cette mesure $\frac{2}{3}\pi OE^2 \times CI$; mais $CI = GH$, donc le solide $= \frac{2}{3}\pi OE^2 \times GH$.

140. Supposons maintenant que nous avons une suite de triangles AOB, BOC, COD, DOE, etc. (fig. 77), qui, comme le triangle précédent, tournent autour du diamètre AZ, il est évident que par leur réunion ils formeront un solide polygonal qui approchera d'autant plus de la sphère que les cotés du polygone générateur ABCDE seront plus petits [71, 79]. Menons du milieu O du diamètre les lignes OF, OG, OH, OI, OK, perpendiculaires sur le milieu des côtés du polygone. D'après le paragraphe précédent, le triangle AOB engendrera un solide qui aura pour mesure $\frac{2}{3}\pi FO^2 \times AL$; de même les triangles BOC, COD, DOE, décriront des solides qui auront pour mesure $\frac{2}{3}\pi OG^2 \times LM$, $\frac{2}{3}\pi OH^2 \times MN$, $\frac{2}{3}\pi\ OI^2 \times NP$.

Maintenant, si on ajoute tous les solides décrits ainsi par tous les triangles qu'on pourrait ainsi inscrire dans le demi-cercle ABCZ, il est évident qu'on aurait un solide polygonal qui approcherait

beaucoup de la sphère; mais avant de les ajouter il faut observer que les perpendiculaires OI, OG, OH, sont toutes égales, et que si le polygone avait un nombre considérable de côtés, ces perpendiculaires approcheraient de plus en plus d'être égales au rayon R, et finiraient par se confondre avec lui de manière que la somme de tous les solides serait $\frac{2}{3}\pi R^2$ (AL + LM × MN, etc.)

Mais les lignes AL, LM, MN, ajoutées ensemble finiraient, dans toute l'étendue du polygone, par être égales au diamètre AZ ou à deux fois le rayon R; donc, pour la somme de tous les solides du polygone entier, on aurait $\frac{2}{3}\pi R^2 \times 2R$ ou $\frac{4}{3}\pi R^3$, qui représente la mesure d'un solide décrit par la révolution d'un polygone d'un nombre infini de côtés ou la solidité de la sphère; ainsi *la solidité de la sphère est égale au cube de son rayon multiplié par quatre fois le tiers du nombre constant* $\pi$.

141. Écrivons la valeur $\frac{4}{3}\pi R^3$ de la manière suivante, $4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$. Nous savons que $4\pi R^2$ est la surface de la sphère dont R est le rayon [130], et, par conséquent, *la solidité de la sphère est égale à sa surface multipliée par le tiers du rayon.*

Un cylindre qui aurait pour rayon celui de la sphère ou R, et pour hauteur le tiers du rayon, aurait pour mesure $\frac{1}{3}\pi R^3$ [125] : donc *la solidité de la sphère égale quatre fois celle d'un cylindre de même rayon, et dont la hauteur ne serait que le tiers de celle du rayon;* ou *la solidité de la sphère*

*est égale à celle d'un cylindre de même rayon, et dont la hauteur serait quatre fois le tiers de ce même rayon.*

142. Un cône dont la hauteur serait quatre fois celle du rayon R de la sphère, aurait pour mesure $\frac{4}{3}\pi R^3$, et aurait la même solidité que la sphère; donc *la solidité de la sphère est égale à celle du cône qui a pour base le rayon de la sphère, et pour hauteur quatre fois ce rayon.*

La sphère dont le rayon serait $R^t$ aurait pour solidité $\frac{4}{3}\pi R'^3$, et, en la comparant à la sphère précédente on voit de suite que *les solidités de deux sphères sont entre elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

143. Un secteur [47] tel que QOR (fig. 77), dans sa révolution autour du diamètre AZ, décrirait un solide qu'on a nommé *secteur sphérique.* Or nous avons vu que la mesure du solide engendré de cette façon, serait [139] $\frac{2}{3}\pi R^2 \times H$, en supposant l'arc formé par un nombre considérable des côtés d'un polygone, la hauteur de ce secteur étant ST=H, et les perpendiculaires OR, OV, OQ devenant égales au rayon R lorsque le polygone se confond avec la circonférence; or cette quantité peut s'écrire ainsi, $2\pi R \times H \times \frac{1}{3} R$. La quantité $2\pi R \times H$ représente la surface de la zone décrite par l'arc QR [135], donc *la solidité d'un secteur sphérique égale la surface de la zone qui lui sert de base multipliée par le tiers du rayon.*

Si la hauteur H devenait égale à 2R, il est évi-

dent qu'on retomberait sur $\frac{4}{5}\pi R^4$, ou sur la solidité de la sphère.

144. *Le segment sphérique à une base* est le solide engendré par la révolution du segment circulaire ABCG (fig. 76) autour du rayon AO; la ligne CG décrivant la base. Nous nous contenterons de donner sa mesure sans le démontrer, et de dire que, *la solidité du segment sphérique à une base, est égale à sa hauteur H multipliée par la moitié de la base P, plus la solidité d'une sphère qui a cette hauteur pour diamètre,* on a $\frac{1}{2}\pi HP + \frac{1}{6}\pi H^3$.

De même *le segment sphérique à deux bases,* qui est le solide DCGH compris entre deux sections parallèles faites dans la sphère, a *pour solidité sa hauteur H, multipliée par la demi-somme des bases P, Q, plus la solidité d'une sphère qui a cette hauteur pour diamètre, ou* $\left(\frac{P+Q}{2}\right)H + \frac{1}{6}\pi H^3$,

145. Nous savons ce que c'est qu'un fuseau sphérique [156]. La partie solide de la sphère interceptée entre les plans ABD, AED (fig. 74) qui forment le fuseau s'appelle un *onglet sphérique*. Si la solidité de la sphère est égale à sa surface multipliée par le tiers du rayon [141], il est évident que celle de l'onglet sera proportionnelle à la surface du fuseau qui lui sert de base, ou que *la surface d'un onglet sphérique égale la surface du fuseau multipliée par le tiers du rayon.* L'aire du fuseau étant $\frac{4\pi R^2 A}{360^2}$, A étant le nombre de de-

grés de l'arc BE, la solidité de l'onglet sera $\frac{4}{5}$ R $\left(\frac{\pi R^2 A}{360^\circ}\right)$ ou $\frac{3}{3}\pi R^3 \times \frac{A}{360^\circ}$.

## PROBLÈMES.

Un *problème* est une question proposée dont on demande la solution. Les *données* du problème sont les choses qui sont connues; les *inconnues* sont celles qu'il faut trouver au moyen du raisonnement ou des *constructions*. Un problème est *indéterminé* quand il admet une foule de solutions diverses.

1. *Trouver un point éloigné d'un point donné d'une distance donnée.* Soit A (fig. 78) le point donné, AB la distance également donnée; du point A, et avec une ouverture de compas AB; je trace la circonférence BCDE, et chaque point de cette circonférence résoudra la question proposée, puisque cette circonférence est partout également distante du point A [45].

2. *Diviser une droite donnée en deux parties égales.* AB (fig. 79) est la droite donnée qu'il faut diviser en deux parties égales. Je pose pour cela une pointe de compas sur B, et avec une ouverture un peu moins grande que AB, je décris les arcs CD, EF. Avec la même ouverture de compas, et de A comme centre, je décris les arcs GH, IK, et la ligne OP, menée par les points où ces arcs se coupent deux à deux, divise AB, au point Q, en deux parties égales.

En effet, les points O et P étant également

éloignés des extrémités A et B doivent faire partie de la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB [10. 11], et entre deux points donnés on ne peut mener qu'une seule ligne droite [6]; donc OQ est cette perpendiculaire elle-même, et coupe AB en deux parties AQ, BQ qui sont égales.

3. *Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par un point donné.* Si le point donné Q (fig. 79) est sur la ligne donnée AB, on prend deux autres points A et B également éloignés de Q, et de ces extrémités comme centres, on trace des arcs de cercles comme dans le problème précédent; OQ est alors la perpendiculaire cherchée.

Si le point donné O se trouve hors la ligne donnée AB, de ce point O comme centre, avec un rayon suffisamment grand, on trace un arc AB qui coupe la ligne donnée en deux points A et B, puis de A et B comme centres on décrit les arcs EF, IK, et entre O et P on mène OP perpendiculaire à AB, ce qu'on prouve comme dans le problème précédent.

4. On demande de *trouver un point qui soit éloigné d'une droite donnée, d'une distance donnée.* AB (fig. 80) est la ligne donnée; sur cette droite je choisis deux points, A et B, sur lesquels j'élève les perpendiculaires BC, AD [probl. 3]; sur ces deux lignes je prends BE, AF, égales à la longeur de la distance donnée; il est évident que FE sera parallèle à AB [25], et que tous ses points seront également éloignés de cette dernière ligne [24].

5. *Diviser une droite en autant de parties qu'on voudra.* Cette question rentre dans celle du probl. 2; puisqu'on peut d'abord diviser la ligne en deux

parties égales ; puis chacune de ces moitiés en deux autres parties ; on procéderait ainsi à la division en 2, 4, 8, 16 ou 32 parties égales. On conçoit que le même système conduirait à partager la ligne en 3 ou 5 parties égales, puis en 6, 12 ou 24 parties ; ou en 5, 10, 20, et qu'avec ces trois suites rien ne serait plus facile que d'obtenir toutes les divisions possibles.

6. *Par un point donné, mener une parallèle à une ligne donnée.* Ce problème se résout facilement par le paragraphe [25], et le probl. 4.

7. *Faire un angle égal à un angle donné.* Soit BAC (fig. 81) l'angle donné : du point A comme centre, et avec un rayon quelconque AB, tracez un arc de cercle BG, et menez la corde CB. Maintenant du point D de la ligne DE avec la même ouverture de compas, tracez l'arc indéfini EH, puis du point E, avec un rayon égal à la corde BC, décrivez un autre arc qui coupe le premier en F, et menez DF; l'angle FDE sera l'angle cherché.

En effet, dans les deux triangles ABC, DEF, les arcs BC, FE sont égaux aussi bien que les cordes, et le rayon AB = DE ; donc l'angle EDF égale l'angle BAC [29, 56].

8. *Diviser un angle ou un arc en deux parties égales.* Supposons que ce soit l'angle qu'on veuille diviser, du sommet A comme centre (fig. 82), décrivez un arc quelconque, et menez à cet arc la corde BC interceptée entre les deux côtés de l'angle. La perpendiculaire AD, abaissée sur le milieu de la corde, partagera l'angle A en deux parties égales [50]; ce qui est évident, les triangles BAO, CAO étant égaux, puisqu'ils ont leurs trois côtés égaux.

L'arc BC est également coupé en deux parties égales par cette construction [50]. On peut sous-diviser ainsi un arc en d'autres arcs de plus en plus petits; et, en procédant à diviser la corde comme nous avons fait pour une ligne droite, on voit qu'on peut aisément diviser un angle en autant de parties qu'on voudra.

Si l'angle donné était BCD (fig. 38), pour avoir un autre angle moitié moins grand, il suffirait de tracer une circonférence du point C comme centre, et tout angle inscrit BAD serait la moitié de l'angle en C, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc BD [59].

9. *Deux angles d'un triangle étant connus, trouver le troisième.* Les trois angles d'un triangle doivent toujours former deux angles droits [36]; plusieurs obliques, qui coupent une droite en un même point, forment aussi des angles dont la somme égale deux angles droits [17] : donc, si on tire la ligne CD (fig. 5), et qu'on prenne les deux angles ABC, ABE, égaux aux deux angles donnés, il est clair que EBD sera le troisième angle du triangle.

10. *Tracer un triangle dont on connaît les trois côtés.* On commence par tirer une ligne AB (fig. 83) égale à l'un des côtés donnés; ensuite, avec une ouverture de compas égale au second côté AC, on décrit du point A comme centre un petit arc; puis d'un rayon égal au troisième côté on décrit du point B un second arc, qui coupe le premier au point C : BAC est le triangle demandé.

11. *Décrire un triangle dont on connaît un an-*

*gle et les deux côtés qui le comprennent* [29]. Sur la ligne AB (fig. 83), prolongée aussi loin qu'on voudra, on fait au point A un angle égal à l'angle donné; et, puisqu'on connaît les longueurs AB, AC des côtés, on mène par l'extrémité de ces lignes la ligne BC, qui termine le triangle.

12. *On demande de tracer un triangle dans lequel on connaît un côté et les deux angles adjacents à ce côté.* On tire AB (fig. 83) égal au côté donné; aux points B et C de cette ligne on fait des angles ABC, BAC égaux aux angles donnés; les deux lignes AC, BC se couperont en C, et compléteront le triangle demandé.

13. *Faire un angle égal à la somme de deux angles d'un triangle.* Il n'est pas nécessaire de connaître pour cela la valeur de chacun des angles du triangle : en effet, soit ABC (fig. 22) le triangle donné : je prolonge un des côtés BC de l'angle inconnu ACB, et l'angle ACH extérieur au triangle [36] est l'angle qu'on cherche; il en est de même de son opposé au sommet BCG.

14. *Tracer un triangle rectangle dont on connaît seulement l'hypothénuse et un côté.* Sur la ligne indéfinie AB (fig. 84) je prends deux points A et B, distants d'une longueur égale au côté donné; à l'extrémité A j'élève une perpendiculaire AC, et du point B comme centre, avec un rayon égal à l'hypothénuse donné, je trace un arc qui coupe AC en un point C: le triangle rectangle ABC résout le problème [38].

15. *Mener deux obliques égales à une perpendiculaire.* Soit AD (fig. 24) perpendiculaire sur BC; je prends deux points A et B également distants de D, où la perpendiculaire coupe AD, et je

joins un point quelconque A de cette perpendiculaire avec les points A et B : les deux obliques AB, AC, sont égales [38].

16. *Un angle d'un parallélogramme étant donné, avec les côtés qui le comprennent, tracer le parallélogramme.* Sur une ligne indéfinie quelconque je prends les points A et B (fig. 85) distants de la longueur d'un des côtés donnés ; puis en A je fais l'angle BAD égal à l'angle donné, et de ce même point comme centre, et avec un rayon égal au second côté donné, je trace un arc qui détermine la hauteur du côté AD ; je mène ensuite DC parallèle à AB, et BC à AD, qui se coupent au sommet de l'angle C, et qui complettent le parallélogramme [39, 40].

Si l'angle donné est droit, la figure est un rectangle ; si de plus les côtés sont égaux, ce sera un quarré ; si les angles non-adjacents sont égaux deux à deux seulement, et les côtés égaux, on aura un losange.

*Trouver la valeur d'un angle d'un polygone.* On divise ce polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux [42] ; on fait la somme de tous les angles de ces triangles [36] ; on en retranche quatre angles droits, et on divise le reste par le nombre des angles ou des côtés du polygone : le quotient est la valeur d'un des angles [43].

18. *Déterminer la valeur d'un angle extérieur d'un polygone.* L'angle extérieur d'un polygone, réuni à l'angle intérieur, forme deux droits : donc, dès qu'on connaît l'angle intérieur, on n'a qu'à le retrancher de deux angles droits pour avoir la valeur de l'angle extérieur du polygone [44]. On sait

d'ailleurs que la somme de tous les angles extérieurs d'un polygone égale quatre angles droits.

19. *Trouver un point* C *également éloigné de trois points* A, D, B, *non en ligne droite* (fig. 32). Menons les droites AD, BD entre ces points, et sur le milieu de ces droites les perpendiculaires CE, CH, le point C résoudra le problème [52].

La même construction servirait à résoudre ces autres problèmes : Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné ; faire passer une circonférence par trois points donnés, non en ligne droite.

20. *Circonscrire une circonférence à un triangle donné.* Puisqu'on peut toujours faire passer une circonférence par les trois sommets d'un triangle, le problème rentre dans le précédent. Quand le triangle a ses trois angles aigus, le centre de la circonférence est dans l'intérieur du triangle ; quand il est rectangle, le centre est sur le milieu de l'hypothénuse ; quand le triangle a un angle obtus, le centre est hors du triangle.

21. *Mener à un cercle donné une tangente en un point donné de sa circonférence.* Menez au point donné D (fig. 30) un rayon CD, que vous prolongez d'une même longueur à l'extérieur de la circonférence ; au point D, milieu de cette ligne, vous élèverez la perpendiculaire DH, qui sera la tangente demandée [47].

22. *Par un point situé hors d'une circonférence mener une tangente à cette circonférence.* Joignez avec le centre de la circonférence donnée le point donné, et de ce point comme centre, avec un rayon égal à la distance de ce point au centre de la circonférence donnée décrivez une seconde circon-

férence ; par les deux points où celle-ci coupera la première menez des droites au point donné, ces droites résoudront le problème.

23. *Tracer un angle droit.* On décrit d'un rayon quelconque une circonférence dans laquelle on mène un diamètre ; sur le milieu de celui-ci on en élève un autre qui lui soit perpendiculaire : leur intersection formera des angles droits [56] ; ou bien on divise la circonférence en quatre parties, et on joint les points de division par des diamètres.

24. *Trouver l'aire d'un rectangle ou d'un parallélogramme.* Supposons que la base ait 15 mètres, et la hauteur 7, l'aire du rectangle sera égale à $15 \times 7$, ou 105 mètres quarrés [65].

25. Une pièce de terre, de forme irrégulière, peut être partagée en un rectangle, un parallélogramme, un triangle et un trapèze : on demande la superficie de cette pièce de terre. Le rectangle a pour base et pour hauteur 16 et 8 mètres ; le parallélogramme 30 mètres de hauteur sur 21 de base ; le triangle 27 de base sur 14 de hauteur, et le trapèze 4 de hauteur, la demi-somme de ses bases parallèles étant de 17 mètres [65 à 69] ; en calculant ces surfaces, on trouve 128 mètres quarrés pour la superficie du rectangle, 630, 189 et 68 pour celles du parallélogramme, du triangle et du trapèze, et en tout 1015 mètres quarrés pour la mesure totale de la pièce.

26. *Déterminer la surface d'un polygone régulier équiangle.* Le polygone a 18 côtés de 5 mètres chacun, et la distance du centre au milieu d'un des côtés est de 22 mètres ; sa surface est donc de 990 mètres quarrés [70].

27. *On demande quelle est la surface d'un cercle dont on connaît la circonférence et le rayon.* Soit cette circonférence égale à 50 mètres 265 millimètres, et le rayon égal à 1 mètre. Sa superficie sera de 201 mètres quarrés [71].

28. *Etant donnés la grandeur de l'arc d'un secteur et son rayon, on demande sa superficie.* Si on suppose que l'arc du secteur soit le 5' de la circonférence précédente, on aura de suite 40 mètres quarrés à peu près pour la mesure de la superficie du secteur [71].

29. *Soit proposé de diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.* Si OH (fig. 86) est la ligne qu'il s'agit de diviser en cinq parties, par exemple; par l'extrémité O, on mène la droite indéfinie OB, et prenant OA d'une grandeur quelconque, on le porte cinq fois sur OB en C, D, F, B. On joint le dernier point de division B avec l'extrémité H, puis on mène AI parallèle à BH et OI est la cinquième partie de OH, et en portant cinq fois OI sur OH on aura divisé cette dernière en cinq parties égales.

Les côtés OA et OI étant parallèles, OB et OH sont coupés proportionnellement en A et en I; mais OA est la cinquième partie de OB, donc OI est la cinquième partie de OH [72, 73].

30. *On propose de diviser une ligne en parties proportionnelles à des lignes données.* Soit AB, (fig. 87) la ligne qu'il faut diviser en parties proportionnelles aux trois lignes X, Y, Z. Par l'extrémité A, je mène la ligne indéfinie AC, et je prends sur cette ligne AD = X, DE = Y, EC = Z; je joins les extrémités CB, et par les points

D et E je mène DG et EH parallèles à CB, et je dis que AB est partagée aux points G, H, B en parties proportionnelles aux lignes données X, Y, Z; car les lignes DG, EH, CB, étant parallèles on a les proportions [72, 73]

AD : DE :: AG : GH.

DE : EC :: GH : BH;

mais AD, DE, EC, sont égales aux lignes X, Y, Z; donc AG; GH, HB, leur sont proportionnelles.

51. *On demande une quatrième proportionnelle, à trois lignes données.* Les trois lignes données sont, X, Y, Z (fig. 87); je tire une ligne droite indéfinie AC, et au point A je forme, au moyen d'une autre droite indéfinie AB, un angle quelconque BAC. Sur AC je fais AE = Z, AD = Y, et sur AB, AH = X; je joins les points E et H et je mène DG parallèle à EH. Ce parallélisme me donne de suite la proportion

AE : AD :: AH : AG;

qui prouve de suite que AG est la ligne demandée; puisque les trois premiers termes de la proportion sont égaux aux trois lignes données [72, 75].

52. *Trouver une ligne qui soit à une autre ligne dans un rapport constant,* par exemple, comme trois est à deux. Soit AB la ligne donnée (fig. 88), je mène la ligne indéfinie CD, puis CE qui rencontre la première sous un angle quelconque, je divise CD en trois parties égales aux points F, G, D (probl. 52); puis sur CE je prends une longueur CH = AB, je joins GH, et par le point D je mène DE parallèle à GH. Il est clair 72, 73] qu'on aura la proportion

CG : CD :: CH : CE;

mais CG est à CD comme 2 est à 5, ainsi l'on a

$$2 : 5 :: CH : CE ;$$

*donc la ligne* CE, qui est à CH comme 5 est à 2, remplit les conditions demandées.

33. *Faire un triangle semblable à un autre triangle donné, mais dont les côtés soient dans un rapport constant avec ceux de ce triangle donné.* Supposons que le triangle donné soit ABC (fig. 50), et qu'on désire faire un triangle semblable, dont les côtés soient à ceux du premier dans le rapport de 3 à l'unité. Je prolonge indéfiniment les côtés AB et BC, et sur leur prolongement je prends des distances AO, DE égales au tiers des côtés AB et BC, puis je mène OE parallèle au côté AC, CF parallèle à AB. Le triangle DEF est le triangle demandé. En effet, nous avons vu [75] qu'on avait les proportions

$$AB : FD :: BC : DE ;$$
$$AB : FD :: AC : FE ;$$
$$BC : DE :: AC : FE ;$$

mais dans toutes ces proportions CF = AO, ou le tiers de AB; DE= $\frac{1}{3}$ BC : par conséquent la dernière proportion donne FE = $\frac{1}{3}$AC : donc le triangle DEF a ses trois côtés dans le rapport demandé du triangle ABC, et le parallélisme des côtés homologues suffit pour prouver que ces triangles sont semblables.

34. *Tracer un polygone régulier semblable à un autre polygone, et dont les côtés sont dans un rapport donné.* Choisissons encore le rapport de 1 à 3 pour le rapport du côté du petit polygone à celui

du grand. On cherchera d'abord une ligne *ab* (*fig.* 52) qui soit avec AB dans le rapport de 1 à 3, comme dans le problème 35; puis un autre *bc* qui soit aussi avec BC dans le rapport exigé, et qui fera avec *ab* un angle *abc* égal à l'angle ABC du polygone donné; on continuera de même à tracer les côtés *ab, bc, cd,* de ce polygone, de manière à ce qu'ils soient parallèles et proportionnels aux côtés AB, BC, CD, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait complété le polygone *abcdefg*. Ce dernier ayant ses côtés homologues parallèles avec ceux du polygone donné et de plus ses côtés étant à ceux du grand polygone dans le rapport de 1 à 3 sera le polygone demandé [78].

35. *On demande une circonférence qui soit à une autre circonférance donnée comme l'unité est à* 5. Les circonférences sont entre elles comme les rayons ou les diamètres [79], il suffira donc de diviser le rayon de la circonférence donnée en 5 parties égales, et de se servir d'une de ces parties comme rayon pour décrire la circonférence exigée.

36. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.* Soient AD et BD (fig. 53), les deux lignes données; je les ajoute à la suite l'une de l'autre, et sur leur longueur comme diamètre, je trace une circonférence ACB. Au point D, où les lignes données se joignent, j'élève la perpendiculaire CD, et cette ligne est la moyenne proportionnelle cherchée. En effet en joignant C avec A et B par les lignes AC, BC, on forme un triangle rectangle qui donne la proportion [80]

$$AD : DC :: DC : BD ;$$

ou $DC^2 = AD \times BD$ : or AD et BD sont les lignes

données ; donc DC est leur moyenne proportionnelle.

On peut encore trouver autrement la moyenne proportionnelle, en prenant la plus longue des lignes, ou AB pour diamètre, puis décrivant la circonférence et posant une extrémité de la plus petite en A, et la couchant sur la plus grande jusqu'en D. Au point D on élève la perpendiculaire CD, et du point C, où elle coupe la circonférence, on mène les lignes CA, CB. La ligne CA remplit les conditions exigées, puisqu'on a la proportion

$$AB : AC :: AC : AD ;$$

ou $AC^2 = AB \times AD$ [80]. De même BC serait moyenne proportionnelle entre deux lignes qui auraient AB et BD pour longueur.

57. *On demande de trouver une ligne sur laquelle on puisse construire un quarré qui soit égal au rectangle fait sur deux autres lignes données.* Ce problème est le même que le précédent. En effet, le quarré fait sur la moyenne proportionnelle DC est égale au rectangle fait sur les lignes données AD, BD qui a pour mesure $AD \times BD$.

58. *Connaissant le produit et la somme des deux côtés adjacents d'un rectangle, construire ce rectangle.* Ce problème rentre encore dans le précédent ; car si sur la somme AB (fig. 89) des côtés adjacents du rectangle, je construis une circonférence ACB, et qu'à l'extrémité A j'élève une perpendiculaire AE égale à la racine quarrée du produit donné $AD \times BD$, puis que je mène au point E une parallèle à la ligne AB jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en C, la perpendicu-

laire CD divisera évidemment AB en deux parties qui seront les côtés du rectangle cherché

39. *Connaissant le produit et la différence des côtés adjacents d'un rectangle, construire ce rectangle.* Soit BD (fig. 89) la différence des deux côtés; à l'extrémité de cette ligne j'élève une perpendiculaire indéfinie, et d'un point C de cette perpendiculaire, placé à une distance de D moindre que la somme donnée des côtés, je décris comme centre, et avec un rayon égal à cette somme des côtés, un arc qui coupe la ligne BD prolongée en A, et je mène AC; les lignes AD et AD + BD remplissent les conditions demandées. En effet, leur différence est BD, et en faisant passer une circonférence par les trois points A, B, C (probl. 19), nous aurons un triangle rectangle ABC, et deux autres triangles rectangles semblables ACD, BCD. Le produit des deux lignes trouvées est $AD^2 + AD \times BD$; or $AD^2 = AC^2 - CD^2$, et nous avons vu que le triangle ABC donnait [80] $DC^2 = AD \times BD$ : substituant ces valeurs dans le produit des deux côtés trouvés, on aura $AC^2 - CD^2 + CD^2$, ou $AC^2$. Les lignes AD et AD + BD sont donc les côtés du rectangle demandé.

40. *Construire un quarré égal à la somme de deux quarrés donnés.* Soit AC (fig. 54) le côté d'un des quarrés donnés, et BC le côté du deuxième quarré également donné. A l'extrémité du côté AC, j'élève une perpendiculaire sur laquelle je prends un point B, distant de C de la longueur du côté donné BC, et par leurs points A et B, je mène l'hypothénuse AB qui sera le côté du quarré cherché [81].

41. *On désire trouver un quarré égal à la somme*

*de trois autres quarrés donnés.* On cherche d'abord un quarré égal à la somme de deux de ces quarrés, puis on cherche un quarré égal à cette somme plus au troisième quarré, en procédant comme dans le problème précédent. On peut toujours ainsi trouver un quarré égal à la somme de tant de quarrés qu'on voudra.

42. *Construire un quarré égal à la différence de deux autres quarrés.* Faites un angle droit quelconque ACB, puis prenez CB égal au côté d'un des quarrés donnés; et du point B comme centre décrivez, avec un rayon égal au côté de l'autre quarré, un arc qui coupera en A le côté de l'angle droit. Le carré construit sur AC sera le quarré demandé, puisque $AC^2 = AB^2 - BC^2$.

On pourrait de même faire un quarré égal à la différence d'autant de quarrés qu'on voudrait.

43. *On demande de construire un quarré qui soit à un autre quarré donné dans un rapport donné.* Soit ce rapport connu, 3 est à 5. Sur la ligne indéfinie AB (fig. 90), je prends des longueurs BC = 3 et AC = 5; sur AB, comme diamètre, je décris une demi-circonférence; au point C j'élève une perpendiculaire CD, et par le point D, où elle rencontre la circonférence, je mène les cordes DA, DB, que je prolonge indéfiniment. Sur la première je prends DE égale au côté du quarré donné, et par le point E je mène EF parallèle à AB; DF sera le côté du quarré cherché. Les parallèles AB, EF donnent en effet [72. 75]

$$DF : DE :: BD : AD;$$

donc $$DF^2 : DE^2 :: BD^2 : AD^2;$$

mais dans le triangle rectangle ABD on a [80]

$AB = \frac{AD^2}{AC}$ et $AB = \frac{BD^2}{BC}$ : donc $AD^2 \times BC = BD^2 \times AC$, ou $BD^2 : AD^2 :: BC : AC$. Comparant cette proportion à la précédente on aura $DF^2 : DE^2 :: BC : AC$; mais $BC = 3\,AC = 5$, donc

$$DF^2 : DE^2 :: 3 : 5;$$

c'est-à-dire que le quarré fait sur DE sera à celui fait sur DF comme 3 est à 5.

44. *Construire un quarré double d'un autre quarré donné.* La proportion ci-dessus donne de suite (en supposant que X et Y soient les côtés du quarré donné et du quarré cherché),

$$Y^2 : X^2 :: 1 : 2;$$

D'où $Y = X\sqrt{2}$; et, si l'on suppose le côté du quarré donné égal à l'unité, on aura $Y = \sqrt{2}$.

Dans un triangle rectangle isocèle ABC (figure 91), on a $AB^2 + BC^2 = AC^2$ : or, comme $AB = BC$, il vient $AC^2 = 2BC^2$; et, si on suppose BC égal à l'unité, on aura $AC^2 = 2$; donc le quarré construit sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle isocèle est le double du quarré construit sur chacun des deux autres côtés.

Un triangle rectangle isocèle est la moitié d'un quarré ABCD, dont l'hypothénuse AC est la diagonale; donc le quarré construit sur la diagonale est le double de ceux construits sur chacun des côtés du quarré.

L'expression $AC = BC\sqrt{2}$ prouve encore qu'il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré [85].

45. *Trouver un quarré qui soit la moitié d'un quarré donné.* Ce problème rentre dans le précédent : en effet, avec le côté du quarré donné BD (fig. 50), comme diamètre, on décrit une circonférence BAD ; puis du centre C on mène un rayon AC perpendiculaire à ce diamètre, et la corde AB, qui joint l'extrémité des deux rayons, est le côté du quarré cherché.

46. *Faire un quarré équivalent à un parallélogramme donné.* Soit A et B la base et la hauteur du parallélogramme ; cherchons une moyenne proportionnelle [80] à ces deux lignes (*probl.* 39) : soit D cette moyenne, on aura cette proportion,

$$A : D :: D : B;$$

$$\text{Ou} \quad D^2 = A \times B;$$

L'aire du parallélogramme est $A \times B$ ; et, si nous construisons un quarré sur la moyenne proportionnelle D, son aire sera $D^2$ ; or nous venons de trouver que ces deux surfaces sont égales, donc le quarré construit sur la ligne D est équivalent au parallélogramme construit sur les lignes A et B.

47. *Construire un quarré équivalent à un triangle donné.* On résout ce problème comme le précédent ; on cherche une moyenne proportionnelle entre la base du triangle donné et la moitié de sa hauteur [68], puis on construit le quarré demandé sur cette moyenne proportionnelle.

48. *Faire un triangle équivalent à un quarré donné.* Menez une diagonale BC (fig. 92) au quarré ABCD ; prolongez le côté CD d'une quantité DE égale à CD, et joignez BE ; le triangle BCE sera le triangle demandé, ce qui est évident,

puisqu'il a même hauteur que le quarré, et le double de sa base [68]. D'ailleurs on voit facilement que cette construction revient à couper le quarré par la diagonale BC, à enlever la partie BAC, à la retourner et à l'appliquer dans la position BDE, ou à faire faire à BAC une demi-révolution autour du point B.

49. *Faire un triangle équivalent à un quadrilatère quelconque.* Soit ABCD (fig. 95) le quadrilatère donné, FE la demi-somme des lignes BC, AD; et CH aussi la demi-somme des côtés AB et DC; sur le milieu de CH j'élève une perpendiculaire, et du point G, situé à une distance double de FE, j'abaisse les obliques CH, CG, et GHC est le triangle demandé : en effet, ce triangle a pour mesure CH $\times$ FE, et le produit de ces lignes représente aussi la mesure du quadrilatère donné.

50. *Inscrire un quarré dans une circonférence donnée.* On mène dans la circonférence donnée deux diamètres qui se coupent à angle droit, puis on joint deux à deux les extrémités de ces diamètres : on a ainsi un quarré inscrit dans une circonférence [61].

51. *Inscrire un octogone dans une circonférence donnée.* On commence par inscrire un quarré dans cette circonférence, comme dans le problème précédent ; puis, sur le milieu AB (fig. 42) d'un des côtés de ce quarré, on abaisse du centre C une perpendiculaire CF, qu'on prolonge en E, jusqu'à ce qu'elle coupe la circonférence ; par les points E et A on trace la corde AE, et cette corde est le côté de l'octogone cherché.

De même, si on voulait inscrire à une circonférence un polygone de 16 côtés, on abaisserait du centre une perpendiculaire sur le milieu AE du côté de l'octogone, et le point G, où cette perpendiculaire couperait la circonférence, déterminerait la longueur de la corde AG qui forme un des côtés du polygone de 16 côtés.

On voit ainsi que rien n'est plus aisé que d'inscrire successivement à une circonférence des polygones de 4, 8, 16, 32, 64, etc., cotés [61, 61 *bis*].

On circonscrit de même un polygone à une circonférence : il suffit, pour trouver le côté du polygone circonscrit, de prolonger au delà de la circonférence le rayon perpendiculaire à la corde, et entre les deux rayons de mener à la circonférence une tangente qui la touche au milieu de l'arc intercepté par les rayons ; ceux-ci déterminent la longueur de cette tangente, qui forme le côté du polygone.

52. *Inscrire un triangle équilatéral dans une circonférence donnée.* Soit ABCDEF (fig. 94) la circonférence donnée, et R son rayon ; supposons que le côté du triangle ait pour longueur X ; je commence par faire cette proportion, $X^2 : R^2 :: 3 : 1$ ; d'où $X = R\sqrt{3}$. Pour justifier cette valeur, sur le milieu des côtés AE, AC du triangle équilatéral AEC j'abaisse des perpendiculaires OF, OB; puis par les points F et B, où elles atteignent la circonférence, je trace les cordes AF, AB, et enfin je mène FB perpendiculaire au rayon AO. Il est aisé de voir que les quatre triangles AGF, AGB,

GOF, GOB sont égaux, et que, par conséquent, les côtés AF, AB sont égaux aux côtés FO et OB ou au rayon; mais les quarrés faits sur les côtés doivent égaler les quarrés faits sur les diagonales AO, FB, et les côtés étant tous égaux, la somme de leurs quarrés peut être représentée par $4FO^2$, qui sera égale à la somme des quarrés des diagonales, ou à $AO^2 + FB^2$; mais $AO = FO$ : retranchant la valeur de AO des deux quantités ci-dessus, il restera, $3FO^2 = FB^2$, ou $FB = FO\sqrt{3}$; donc FB est le côté du triangle équilatéral inscrit, ou le côté du triangle demandé.

58. *Inscrire un hexagone dans une circonférence donnée.* Quand on a inscrit un triangle équilatéral, il suffit de partager les arcs qui se trouvent entre les sommets AE, AC de ce triangle par des perpendiculaires OF, OB, élevées sur ses côtés, on a ainsi les cordes AF, AB, qui sont les côtés de l'hexagone inscrit.

Rien ne serait donc plus facile que d'inscrire dans une circonférence, ou de lui circonscrire des polygones réguliers équiangles de 6, 12, 24, et 48 côtés. Dans la pratique, on se contente de porter le rayon six fois sur la circonférence, pour avoir le côté de l'hexagone, parce que le rayon est, à fort peu près, le sixième de la circonférence.

54. *Inscrire dans un cercle donné un décagone régulier.* Divisez le rayon AO (fig. 95), de manière qu'on ait cette proportion,

$$AO : OM :: OM : AM;$$

Prenez la corde AB égale à OM, et AB sera le

côté du décagone régulier qu'il faudra dix fois porter sur la circonférence.

En joignant MB, on a par construction, à cause de AB = OM,

$$AO : AB :: AB : AM ;$$

les triangles ABO, AMB ayant ainsi un angle commun A compris entre côtés proportionnels, sont semblables. Le triangle ABO est isocèle; donc le triangle AMB l'est aussi, et on a AB = BM ; et, comme AB = OM, on a aussi BM = OM : le triangle BMO est donc aussi isocèle.

L'angle AMB, extérieur au triangle BMO, est double de l'intérieur O [26] : or l'angle AMB = MAB; donc le triangle OAB est tel que chacun des angles a la base OAB et OBA est double de l'angle du sommet O; donc les trois angles du triangle valent 5 fois l'angle O, et cet angle est ainsi la cinquième partie de deux angles droits, ou la dixième de quatre; donc l'arc AB est la dixième partie de la circonférence, et la corde AB le côté du décagone régulier.

55. *Inscrire un pentagone dans une circonférence donnée.* Ce problème est le même que le précédent, puisqu'il suffit de joindre de deux en deux, par des cordes, les sommets C et B d'un décagone, pour avoir un pentagone régulier.

On pourrait ainsi inscrire à une circonférence des polygones de 20, 40 ou 80 côtés; puis prenant l'arc qui sous-tend un côté de l'hexagone, qui est un sixième de la circonférence, et, en retranchant l'arc qui sous-tend le côté du décagone, qui est le dixième de la circonférence, on

aura $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$; on pourra donc inscrire ainsi des pentedécagones et des polygones de 30, 60 ou 120 côtés.

56. *Trouver la circonférence d'un cercle dont le rayon est donné.* Soit 15 mètres le rayon du cercle donné ou R; la formule $2\pi R$ [88] donne de suite pour la circonférence de ce cercle 94 mètres, 25 millimètres.

57. *Connaissant la circonférence du cercle, trouver le rayon.* Si cette circonférence est de 94 mètres 25 millimètres, la formule $2\pi R = 94,25$ ou tout est connu excepté R donne de suite $R = \frac{94,25}{2\pi} = 15$ mètres

58. *Trouver la surface d'un cercle dont on connaît le rayon.* Faisons usage de la formule $\pi R^2$ qui représente la surface du cercle [89], et supposons comme ci-dessus que le rayon R est de 15 mètres, on aura pour la surface de ce cercle, 706 mètres 68 millim. quarrés.

59. *Connaissant l'aire du cercle, calculer le rayon.* Si cet aire est de 706 mètres, 68 millimètres quarrés, on aura $\pi R^2 = 706,68$, d'où $R = \sqrt{\frac{706,68}{\pi}} = 15$ mètres.

60. *Connaissant le rayon, calculer la longueur d'un arc.* Soit A l'arc donné, exprimé en degrés et parties de degrés, L sa longueur, on fera la proportion

$$360 : A :: 2\pi R : L = \frac{A \times 2\pi R}{360} = \frac{A \times \pi R}{180}, \text{ soit } A =$$

75° et R = 287 mètres, on trouvera par cette formule L = 375 mètres, 83 millimètres.

61. *On demande la surface convexe d'un prisme dont la base a 25 mètres de contour, et dont la hauteur est de 7 mètres.* La règle donnée [107] fournit aussitôt 175 mètres quarrés.

62. *Quelle est la surface convexe d'une pyramide réguliere, dont le contour de la base et la hauteur d'une des faces sont donnés.* Le contour de la base sera si on veut de 90 mètres, et la hauteur de 24. On trouve ainsi, pour cette surface convexe [107], 1080 mètres quarrés.

63. *Déterminer la solidité d'un prisme triangulaire, dont on connaît la base.* [110] Dès qu'on connaît l'aire de la surface de la base, il n'y a plus qu'à multiplier cette base par la hauteur. Ainsi, en supposant que le triangle de la base soit de 25 mètres quarrés, et que la hauteur soit de 16 mètres, on a pour la solidité du prisme triangulaire qui a ces dimensions 400 mètres cubes.

64. On obtiendrait de même la solidité d'un prisme polygonal, dès qu'on connaîtrait la surface de la base et sa hauteur.

Une pierre de taille de la forme d'un parallélipipède rectangle, a pour dimension en longueur, largeur et épaisseur 6, 4 et 3 mètres, on demande sa solidité? Multipliez ces trois nombres l'un par l'autre, et vous aurez pour résultat 72 mètres cubes.

65. *Trouver la solidité d'une pyramide polygonale régulière dont on connaît l'aire de la base et la hauteur.* L'aire de la base sera, par exemple, de 65 mètres quarrés, la hauteur de 18; on a de

suite [112] pour la solidité de la pyramide 390 mètres cubes.

66. *Déterminer la hauteur que devrait avoir une pyramide de même base qu'une autre pyramide donnée, pour que sa solidité soit le huitième de la deuxième pyramide.* Soit la hauteur de la pyramide donnée égale à 24, et l'aire de sa base 20 mètres, sa solidité sera 160 mètres cubes; [112] nous savons aussi que deux pyramides sont entre elles comme les cubes des côtés homologues, [115] ou comme les cubes des hauteurs, on aura donc, en exprimant la solidité de la pyramide donnée par S, et celle de la pyramide cherchée par $s$, et les hauteurs par H et $h$, et par $a$ la base commune.

$$S : s :: \frac{aH}{3} : \frac{ah}{3};$$

mais on a déjà

$$S : s :: 8 : 1;$$

donc on aura

$$8 : 1 :: H : h;$$

ou $h = \frac{1}{8} H = 3$; en calculant d'après cette hauteur la solidité de la nouvelle pyramide, on la trouvera égale à 20 mètres cubes, qui est juste le huitième de 160.

67. *Les trois arêtes d'un prisme tronqué droit sont de 13, 15 et 17 mètres, sa base égale 37 mètres quarrés; on demande sa solidité?* Faisons d'après la règle [117], la somme des trois arêtes prenons le tiers qui $= 15$, multiplions par 37 mètres de la base, et nous aurons pour la solidité du prisme 555 mètres cubes.

68. *Trouver la surface convexe d'un cylindre*

*dont la hauteur est 20 mètres, et dont le rayon de la base est 6 mètres.* Cherchons d'abord la circonférence de la base, nous aurons [88] 37 mètres quarrés 76 centimètres pour la circonférence de cette base, multiplions cette circonférence par la hauteur 20, et le résultat, ou 754 mètres quarrés, sera la surface convexe du cylindre [119].

69. *On cherche la surface totale du même cylindre.* Nous avons déjà 754 mètres pour la surface convexe; en ajoutant à cela deux fois 115 mètres quarrés pour la surface des deux bases, nous aurons pour la surface totale de ce cylindre droit, 980 mètres quarrés.

70. *On désire savoir quelle est la solidité de ce cylindre.* Nous avons trouvé la surface de sa base égale à 115 mètres quarrés, sa hauteur est de 20 mètres; donc sa solidité est 2260 mètres cubes [121].

71. *Trouver la surface convexe et la solidité d'une colonne dont on connaît le rayon et la hauteur.* Les problèmes précédents donnent, en supposant que le rayon soit de 8 mètres 5 millimètres, et la hauteur de 6 mètres, pour la surface convexe 18, 8 mètres quarrés, et pour la solidité 4, 71 mètres cubes.

72. *Quel rayon faut-il donner à la base d'un cylindre, pour que ce cylindre, qui est 4 fois plus élevé qu'un cylindre donné ait la même solidité que ce dernier.* Soit R le rayon de la base du cylindre donné, H sa hauteur, sa solidité sera $\pi R^2 \times H$ [121]; celle de l'autre cylindre, en supposant que le rayon soit $r$ et la hauteur 4H sera $\pi r^2 \times 4H$. Ces deux valeurs doivent être égales; donc, en effaçant les quantités qui se détruisent, $R^2 = 4r^2$.

ou $r = \frac{1}{2} R$, c'est-à-dire que le rayon du nouveau cylindre doit être la moitié du cylindre donné.

73. *On demande la surface convexe d'un cône droit circulaire, dont le rayon R de la base est donné, et dont on connaît la longueur* H *d'une arête.* Soit $R = 6$ mètres, et $H = 24$ mètres, la circonférence de la base sera 37,70 mètres et la surface convexe 455,16 mètres quarrés [123].

74. *Trouver la surface totale de ce même cône.* Nous connaissons la surface convexe 455,16 mètres; ajoutons-y la surface de la base 113 mètres, et la surface totale sera 568 mètres quarrés.

75. *Quelle sera la solidité de ce même cône.* La base a 113 mètres quarrés, le tiers de la hauteur [125] est de 8 mètres, la solidité du cône sera donc 804 mètres cubes.

76. *On connaît le rayon d'une sphère, on demande quelle est la surface de cette sphère.* Nous supposerons que le rayon est 2 mètres, et la formule $4\pi R^2$ [130] nous donnera de suite 50, 26 mètres quarrés pour la surface de cette sphère.

La terre étant supposée ronde, a pour rayon 1452 lieues; en calculant d'après cette donnée, on trouvera facilement que dans cette supposition elle doit avoir 25, 769, 000 lieues quarrées de surface.

77. *On cherche un cylindre dont la surface convexe soit le double de celle d'une sphère qui a même rayon que la base du cylindre.* Ce problême se résout sans difficulté [132], le cylindre doit avoir pour hauteur deux fois le diamètre de la sphère.

78. *Sur un grand cercle de la sphère, on élève*

*un cône dont ce cercle est la base; quelle doit être sa hauteur pour que sa surface soit égale à celle de la sphère?* Il doit avoir pour hauteur, quatre fois le rayon de la sphère. [133]

79. *Quel doit être le rayon d'une sphère pour que sa surface soit 16 fois plus étendue que celle d'une sphère donnée.* Les surfaces des sphères sont entre elles comme les quarrés des rayons [133], ce qui donne la proportion, en supposant que $r$ et R soient les rayons des sphères, $s$ et S leurs surfaces :

$$S : s :: R^2 : r^2;$$

mais on demande que S soit à $s$ :: 16 : 1;

donc $$1 : 16 :: r^2 : R^2;$$

ou $R^2 = 16r^2$, ou $R = 4r$. Il suffit donc que le rayon de la nouvelle sphère soit quatre fois plus considérable que celui de la sphère donnée pour que sa surface ait 16 fois plus d'étendue

80. *Une zone, qui fait partie d'une sphère d'un rayon* R = 7 *mètres a elle-même* 20 *mètres de hauteur : quelle est sa surface?* La circonférence d'un grand cercle serait égale à 44 mètres, et celle de la zone à 88 mètres quarrés [135].

Les zônes glaciales de la terre, supposée une sphère parfaite, sont des zones à une base qui ont 23° 28′ de largeur; les zônes tempérées 43° 4′, et la zone torride 46°, 56′, or on tire de ces données que les zones glaciales ont 2, 181, 400; les zones tempérées, 15, 507, 200, et la zone torride, 8, 130, 400 lieues quarrées de surface.

81. Un fuseau de la même sphère est formé par deux plans qui interceptent un sixième de la circonférence, sa surface sera donc le sixième de

celle de la sphère, ou 8, 38 mètres quarrés. (probl. 76)

82. *Trouver la solidité de la sphère.* (probl. 76) Multiplions sa surface 50 mètres, 26 millimètres par le tiers du rayon [140, 141], et nous aurons pour résultat, 33, 50 mètres cubes, ou bien multiplions 8, le cube de son rayon, par 4, 19 ou les quatre tiers du nombre $\pi = 3, 14159$, et nous trouverons encore 33, 50 mètres cubes pour cette solidité.

83. *On demande quelle hauteur doit avoir un cylindre, pour que sa solidité soit 6 fois celle d'une sphère donnée.* Soit R le rayon de la sphère donnée, sa solidité sera $\frac{4}{3}\pi R^3$, et 6 fois cette solidité $\frac{24}{3}\pi R$ ou $8\pi R^3$. Si le rayon du cylindre est $r$ et H sa hauteur, sa solidité, sera $\pi r^2 \times H$; or ces deux valeurs doivent être égales, c'est-à-dire qu'on doit avoir $8\pi R^3 = \pi r^2 \times H$ ou $8R^3 = r^2 \times H$. Il y a dans cette égalité deux quantités inconnues, $r$ et H, le problème est donc indéterminé et admet une foule de solutions. Si on fait le rayon $r$ du cylindre égal à celui de la sphère R, on aura $H = 8R$, c'est-à-dire que la hauteur H du cylindre devrait être égale à huit fois le rayon de la sphère pour que sa solidité fût 6 fois plus considérable.

Si on prend, au contraire, la hauteur H égale au rayon R de la sphère, on aura de suite $r^2 = 8R^2$, ou $r = R\sqrt{8}$; ce qui donne $r = 2, 83$ R, ou $r$ presque égal à trois fois le rayon de la sphère.

84. *Quel est le cône qui aurait en solidité la moitié de celle d'une sphère donnée?* La sphère a toujours

pour solidité $\frac{4}{3}\pi R^3$ dont la moitié est $\frac{2}{3}\pi R^3$; le cône dont le rayon serait $r$, et la hauteur H, aurait pour solidité $\frac{1}{3}\pi r^2 \times H$: donc $\frac{1}{3}\pi r^2 \times H = \frac{2}{3}\pi R^3$, ou $r^2 \times H = 2R^2$. Le problème est aussi indéterminé que le précédent. Faisons le rayon $r$ de la base du cône égale R, nous aurons $H = 2R$ ou la hauteur du cône égale au diamètre de la sphère; que la hauteur H, au contraire, égale le diamètre de la sphère, il viendra $r^2 = R^2$, ou $r = R$; ce qui indique que, dans ce cas, le rayon de la base du cône doit égaler le rayon de la sphère pour que la solidité soit moitié moins grande que celle de cette sphère [142].

85. *Trouver une sphère dont la solidité soit à celle d'une autre sphère donnée dans un rapport constant.* Que ce rapport soit comme l'unité est à huit, les solidités des sphères dont les rayons seraient R et $r$ seraient $\frac{4}{3}\pi R^3$; $\frac{4}{3}\pi r^3$: donc on aurait cette proportion,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 :: 1 : 8,$$

ou $$R^3 : r^3 :: 1 : 8;$$

Ce qui est évident, puisque les sphères sont entre elles comme les cubes des rayons [142]; on tirerait aisément de là $r^3 = 8R^3$, ou $r = 2R$, c'est-à-dire que la nouvelle sphère, avec un rayon double de la sphère donnée, aurait une solidité huit fois plus considérable.

86. *On demande la solidité d'un secteur sphérique, connaissant la surface de la zone qui lui sert*

*de base.* Multiplions la surface de la zone trouvée (probl. 80) par le tiers du rayon, ou 2, 33 mètres, et nous aurons pour la solidité du secteur sphérique 204 mètres cubes [143].

87. *Déterminer la solidité d'un onglet sphérique quand on connaît le fuseau intercepté par les cercles qui lui servent de base.* Multiplions encore la surface du fuseau trouvée (probl. 8) par 2, 33 ou le tiers du rayon, pour avoir 19, 65 mètres cubes pour la solidité de l'onglet.

Bien entendu que, si on ne connaissait que le rayon de la sphère, on commencerait par chercher la surface de la zone et du fuseau, avant de déterminer le secteur et l'onglet sphériques auxquels ils servent de base.

FIN.

# TABLE

## DES MATIÈRES.


INTRODUCTION. 1

Des angles et des Perpendiculaires. 4

Des Lignes parallèles. 9

Des Triangles et des Obliques. 12

Des Quadrilatères et des Polygones. 18

De la Circonférence. 22

De la Mesure des angles. 29

Des Proportions. 33

De la Mesure des surfaces. 36

Des Lignes proportionnelles et des figures semblables. 41

Des Moyennes proportionnelles et du Triangle rectangle. 45

Des Figures semblables. 47

De la Division du cercle, de la Mesure des angles,

et du Rapport du diamètre à la circonférence. 49
Des Plans et des Angles solides. 54
Des Polyèdres. 59
De la Mesure des aires et de la Solidité des polyèdres. 65
Des Polyèdres semblables et du Prisme. 68
Du Cylindre. 70
Du Cône. 74
De la Sphère. 78
Problèmes. 92

FIN DE LA TABLE.

## EXPLICATION

### DES SIGNES USITÉS EN GÉOMÉTRIE.

Le signe = signifie *égal :* ainsi AB = BC veut dire AB égale BC.

Le signe +, qui indique l'addition, se prononce *plus.*

Le signe —, qui est celui de la soustraction, se prononce *moins.*

Le signe × indique une multiplication : ainsi AB × BC, qui représente le produit de AB par BC, se prononce AB *multiplié par* BC. Quand plusieurs quantités sont multipliées par une même quantité, on les réunit dans une parenthèse devant laquelle on écrit la quantité commune qui les multiplie toutes : ainsi AB (BC + CD — EF) équivaut à AB × BC + AB × CD — AB × EF. Quand il ne peut pas y avoir d'équivoque, on se contente quelquefois de mettre un point pour marquer la multiplication, comme X.Y, ou même de mettre les deux termes à multiplier l'un à côté de l'autre, sans signe intermédiaire, comme R*y*, qui indique le produit de R multiplié par *y*. Il est clair que, si un de ces termes est un nombre comme 5R, il signifie que la quantité R est prise 5 fois, ou répétée 5 fois.

Le signe < signifie qu'une quantité est plus petite qu'une autre : A < B s'exprime A *plus petit* que B.

Le signe > signifie, au contraire, que la première quantité est plus grande que la seconde.

Une quantité multipliée par elle-même donne pour produit ce qu'on appelle son *quarré*, et se marque par un petit *deux* qu'on pose en haut et à droite de l'expression; par exemple, $AB^2$ signifie le quarré fait sur AB, ou AB multiplié par lui-même. Le cube, ou la multiplication d'une même quantité deux fois par elle-même, se marque par un *trois* placé de même : ainsi $AB^3$, qu'on exprime « AB *élevé au cube*, » équivaut à $AB \times AB \times AB$.

Le signe $\sqrt{\phantom{A}}$ indique l'extraction de la racine quarrée d'une quantité : si c'est celle de la racine cubique, on met un 3 entre les branches du signe radical ; ainsi $\sqrt{A+B}$, $\sqrt{A \times B}$, $\sqrt[3]{A-B}$, $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ désignent, les deux premières, qu'il faut extraire la racine quarrée de la somme ou du produit des quantités A et B ; et les deux autres, qu'on doit extraire la racine cube de la différence des quantités A et B, ou du quotient de la division de la première par la seconde.

*Nota.* Un chiffre entre crochets, tels que ceci [32], indique qu'on renvoie à un paragraphe où la proposition dont il est question a été annoncée ou démontrée.

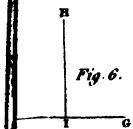



Fig. 6.

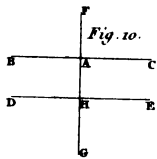



Fig. 10.

Fig. 15.

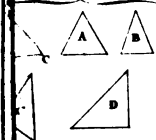



Fig. 19.

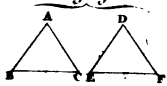



Fig. 28.

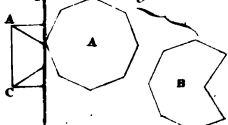



Fig. 33.

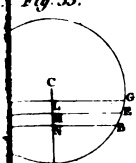



Fig. 36.

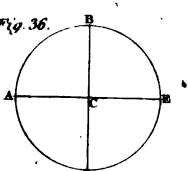
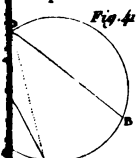
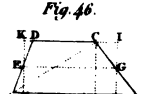


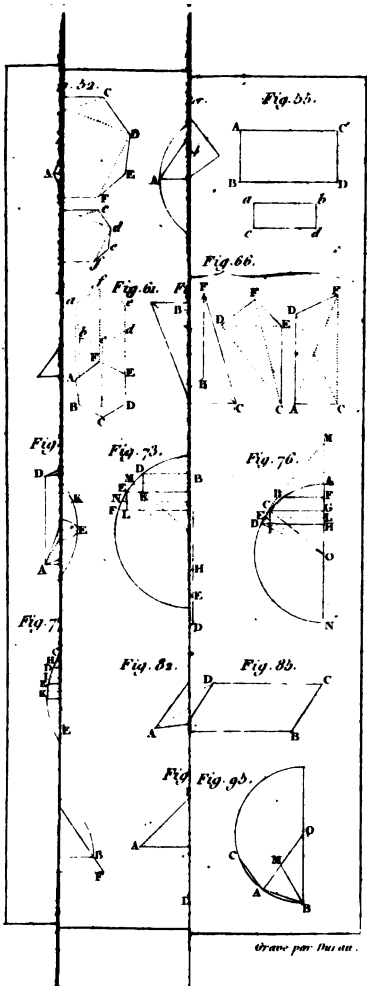

Fig. 41.




45.

Fig. 46.






Gravé par Duran.

ON TROUVE

CHEZ LE MÊME LIBRAIRE.

---

TABLE HÉMÉRIDIENNE DE BIENFAISANCE ET D'ÉMULATION, à l'usage de la jeunesse et des pères de famille qui s'occupent de l'éducation de leurs enfans; par M. F. [illegible] 4 pages, fol. est. 30 c.

TABLE D'ÉMULATION ÉLÉMENTAIRE, à l'usage des gens du monde et des autres gens; par M. [illegible], D. M.; ex-[illegible] des hôpitaux d'accouchemens du [illegible] et [illegible]; ex-premier interne des [illegible] de la maison royale de Charenton [illegible] 1815, avec de [illegible] 1 fr.

LETTRES A CLARISSE sur la Physiologie de l'Homme; par M. Isidore Bourdon, docteur en médecine, ancien de la Physiologie médicale [illegible] 1814-18[illegible], avec [illegible] imprimé. [illegible]

[illegible] C. [illegible]

EB

AUG 9 - 1